

宇宙論における 非線形構造形成

松原隆彦

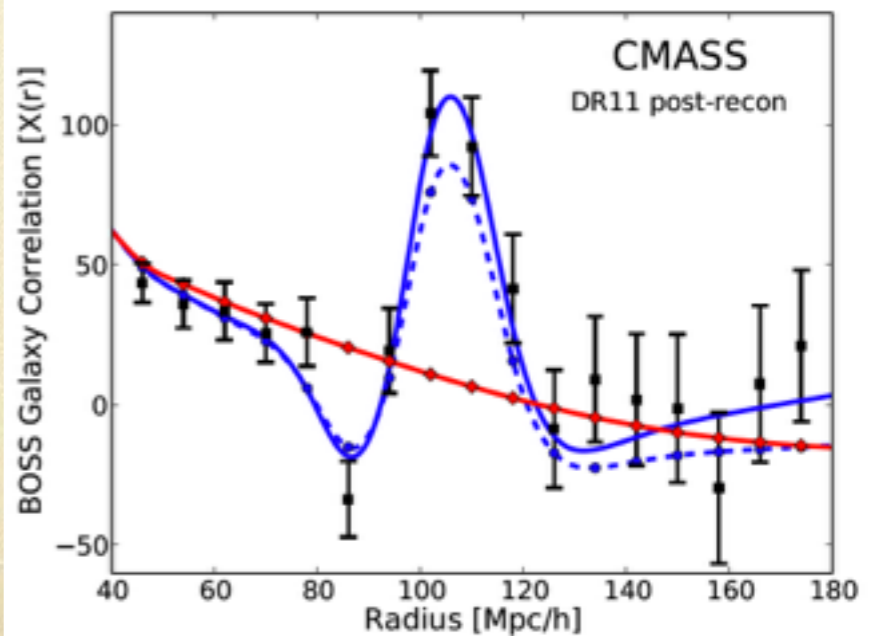
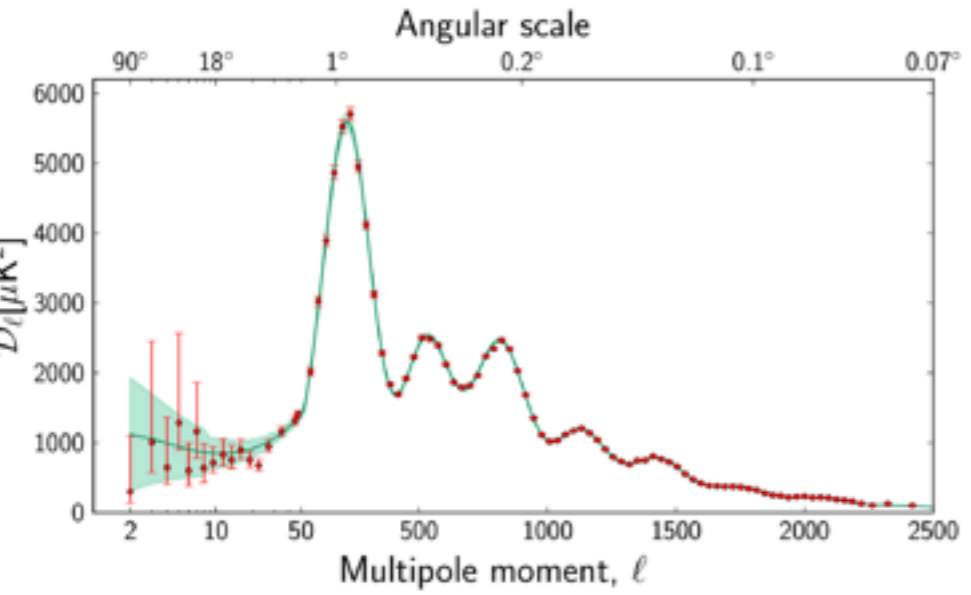
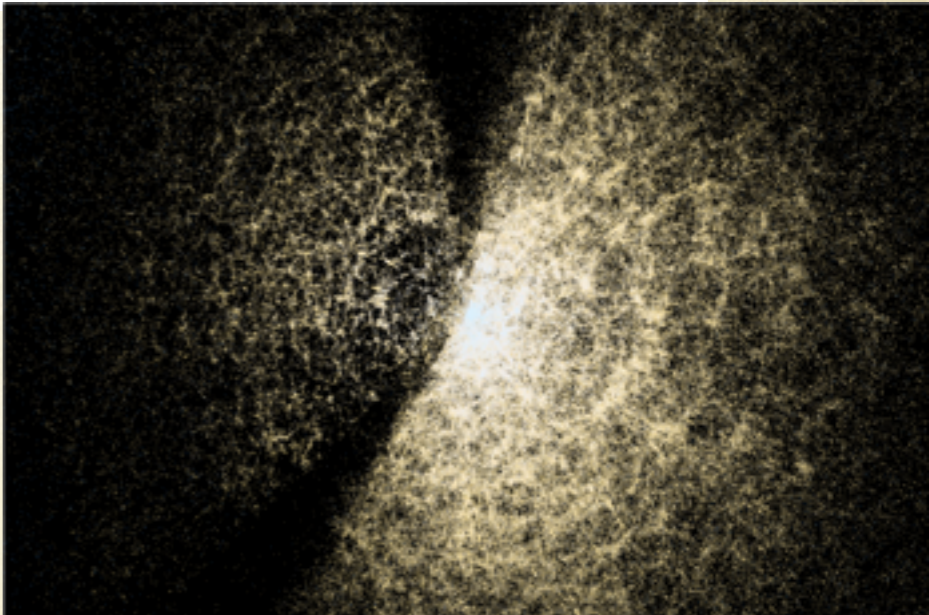
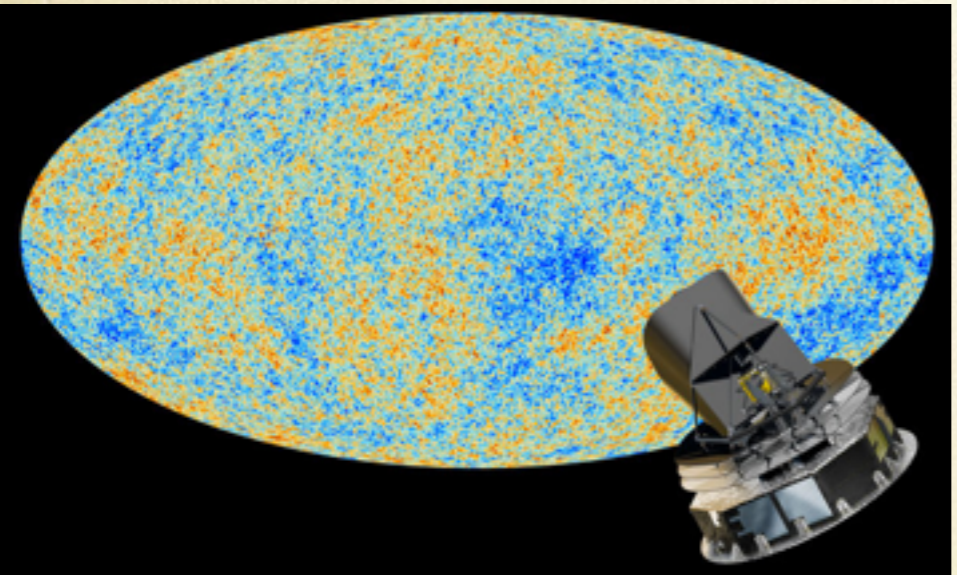
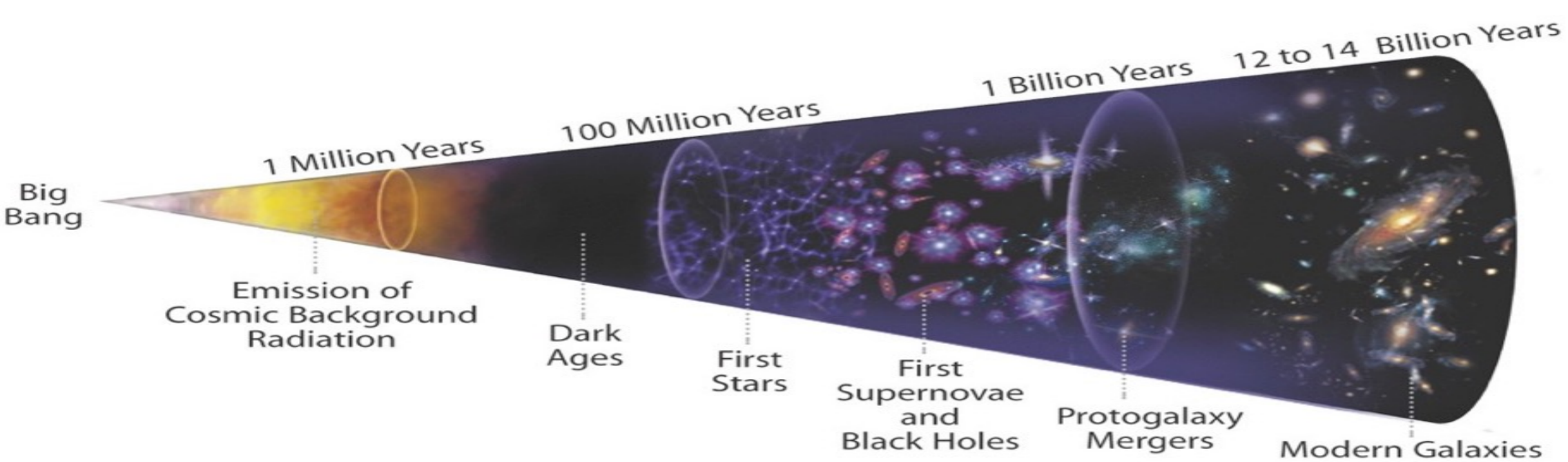
(名古屋大学)

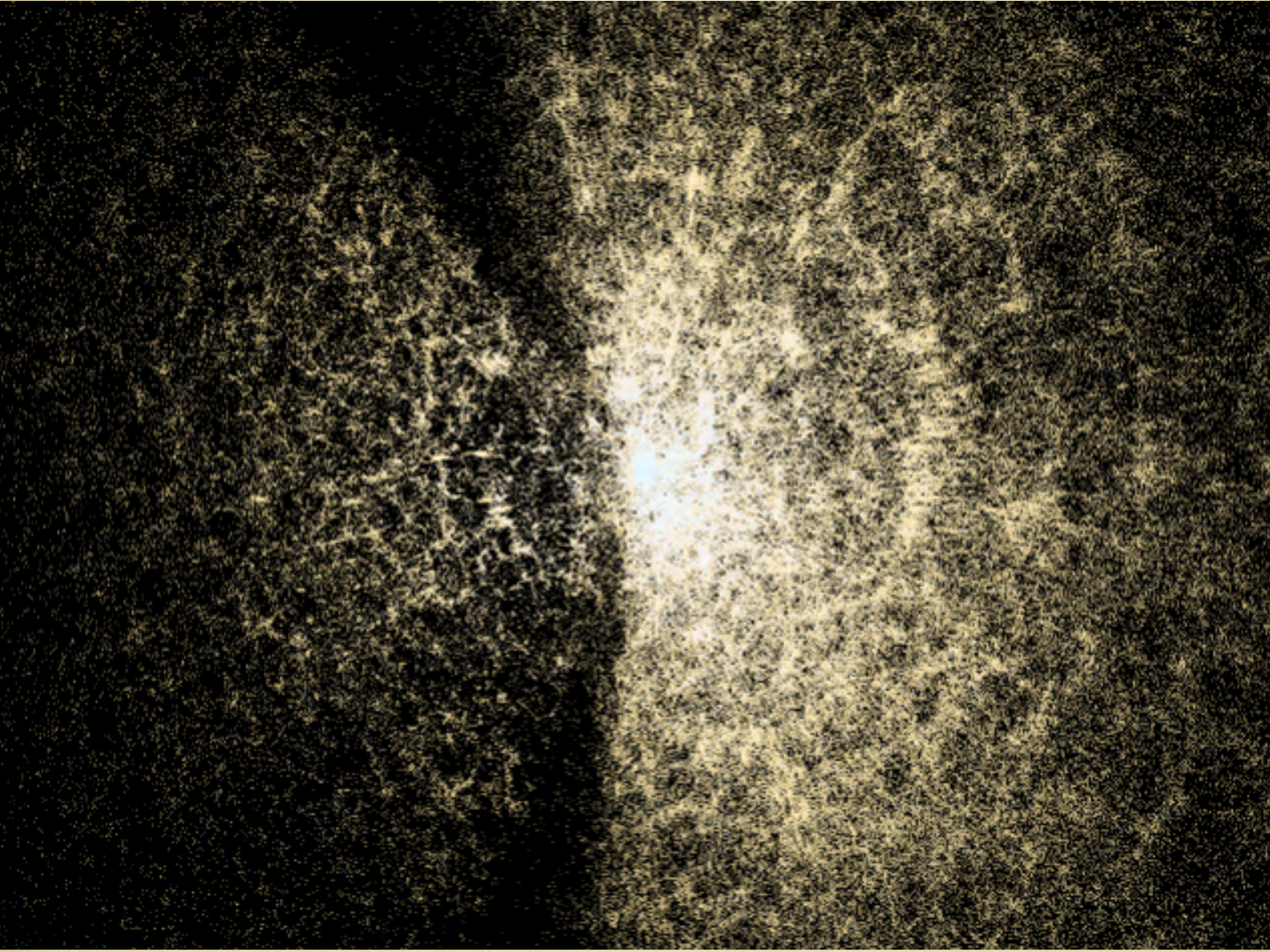
若手夏の学校@戸倉上山田温泉

2015/7/28

観測的宇宙論の目的

- 観測事実をもとに宇宙全体の知見を得る
- できるだけ広い宇宙（時空間）の範囲を調べる
 - 特に密度ゆらぎが精密宇宙論の情報源として有用





線形理論と非線形効果

- 簡単な例

- 空間ゆらぎを表す変数 $F(\mathbf{x}, t)$ についての簡単な非線形微分方程式を例にとる：

$$\frac{\partial F}{\partial t} + a\Delta F = bF^2$$

- 線形理論

- ゆらぎ変数の1次の項だけを残し、2次以上は小さいとして無視
- 空間的フーリエ変換 $F(\mathbf{x}, t) \rightarrow \tilde{F}(\mathbf{k}, t)$ により、各フーリエ係数が独立に進化 \Rightarrow 時間の常微分方程式に帰着

$$\frac{\partial F}{\partial t} + a\Delta F = bF^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} - ak^2 \tilde{F} = 0$$

- 空間的なゆらぎの各波長成分がお互いに独立な方程式にしたがう
- 対応する波長の初期ゆらぎにしかその後の進化が依存しない

線形理論と非線形効果

- ゆらぎがある程度成長することにより、非線形効果は無視できなくなる
 - すべてのフーリエ係数がお互いに影響し合うようになり、解析が急に複雑化

$$\frac{\partial F}{\partial t} + a\Delta F = bF^2 \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{F}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} - ak^2 \tilde{F}(\mathbf{k}, t) = b \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \tilde{F}(\mathbf{k}', t) \tilde{F}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t)$$

- もはやすべてのフーリエ係数を一度に考えなければならない
- 初期ゆらぎのすべての波長成分がその後の進化に影響する

非線形摂動論

- 非線形摂動論

- 線形解を $F^{(1)}$ とおき、線形解の n 次の量を $F^{(n)} \sim \mathcal{O}\left(F^{(1)}\right)^n$ として、解を次のように展開：

$$F = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} + \dots$$

- 方程式を各次数ごとの成分に分解：

$$\frac{\partial F}{\partial t} + a\Delta F = bF^2$$



$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + a\Delta F^{(1)} = 0$$

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + a\Delta F^{(2)} = b\left(F^{(1)}\right)^2$$

$$\frac{\partial F^{(3)}}{\partial t} + a\Delta F^{(3)} = 2bF^{(1)}F^{(2)}$$

⋮

- 各右辺は低次の解で与えられるので、上から順番に解いていくことにより、各方程式は（非斉次）線形常微分方程式として解くことができる

非線形摂動論

- 非線形摂動論の適用範囲

- 高次の項は低次の項より十分に小さいことが必要：

$$F^{(n)} \sim \mathcal{O} \left(F^{(1)} \right)^n \Rightarrow 1 \gg F^{(1)} \gg F^{(2)} \gg F^{(3)} \gg \dots$$

大規模構造の力学

- ダークマターの空間分布

- 空間的密度ゆらぎ $\delta(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}$

- 膨張宇宙における無衝突粒子の発展方程式

Continuity:
$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot [(1 + \delta)\mathbf{v}] = 0$$

Euler:
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{a} \nabla \Phi$$

Poisson:
$$\Delta \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta$$

線形理論

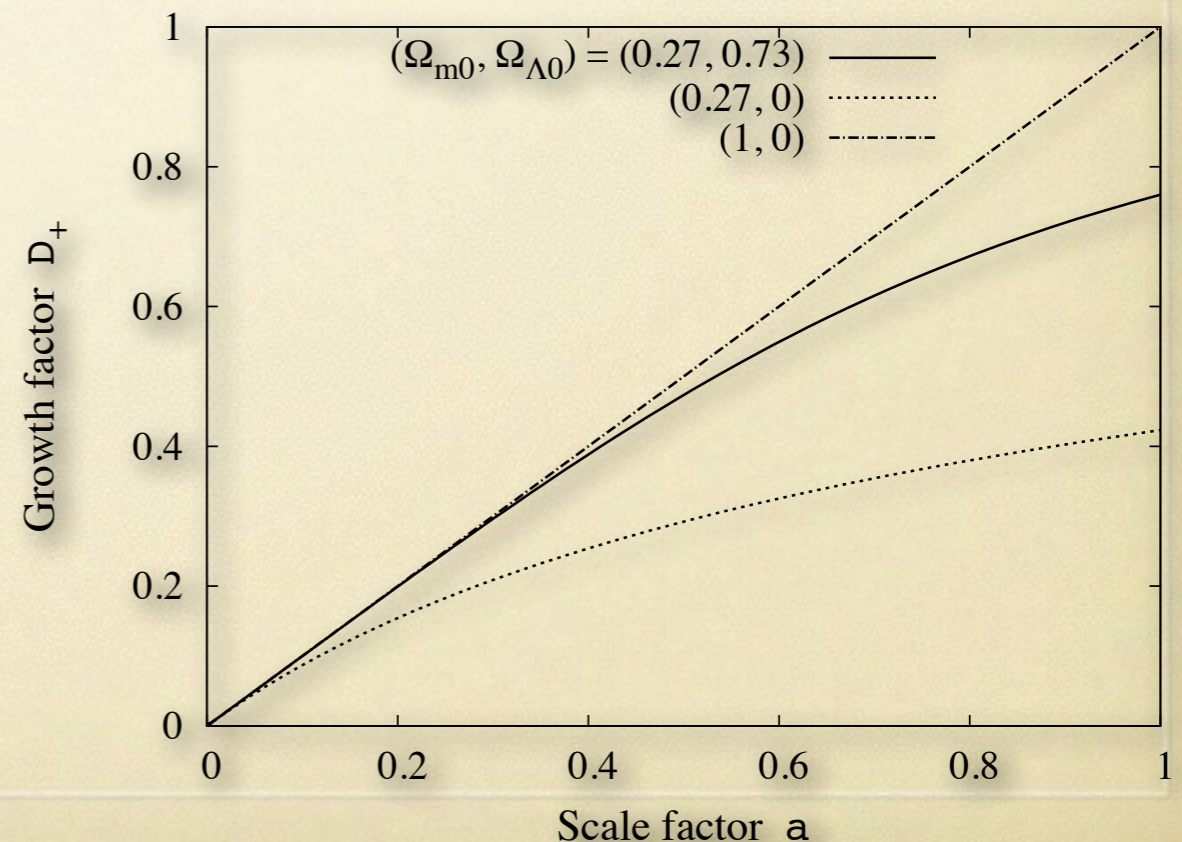
- 線形理論の適用範囲

- 密度ゆらぎが十分に小さい
 - 高赤方偏移宇宙
 - 大スケール宇宙 (ゆらぎの長波長成分)

- 線形成長

- 各フーリエ成分が独立に発展

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} - 4\pi G \bar{\rho} \delta = 0$$



高次摂動解

$$\delta^{(n)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{n!} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3 k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n - \mathbf{k})$$

$$\times F_n(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{k}_n)$$

$$\theta^{(n)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{n!} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3 k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n - \mathbf{k})$$

$$\times G_n(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{k}_n)$$

$$F_n(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n) = \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} \frac{G_m(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_m)}{(2n+3)(n-1)}$$

$$\times [(2n+1)\alpha(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_m, \mathbf{k}_{m+1} + \cdots + \mathbf{k}_n) F_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \cdots, \mathbf{k}_n)$$

$$+ 2\beta(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_m, \mathbf{k}_{m+1} + \cdots + \mathbf{k}_n) G_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \cdots, \mathbf{k}_n)]$$

$$G_n(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n) = \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} \frac{G_m(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_m)}{(2n+3)(n-1)}$$

$$\times [3\alpha(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_m, \mathbf{k}_{m+1} + \cdots + \mathbf{k}_n) F_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \cdots, \mathbf{k}_n)$$

$$+ 2n\beta(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_m, \mathbf{k}_{m+1} + \cdots + \mathbf{k}_n) G_{n-m}(\mathbf{k}_{m+1}, \cdots, \mathbf{k}_n)]$$

$$F_1(\mathbf{k}_1) = 1, \quad G_1(\mathbf{k}_1) = 1$$

$$F_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{10}{7} + \left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right) \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} + \frac{4}{7} \left(\frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} \right)^2$$

$$G_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{6}{7} + \left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right) \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} + \frac{8}{7} \left(\frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} \right)^2$$

観測量

- 密度ゆらぎの具体的な値を理論的に予言することはできない
 - 密度ゆらぎの統計的な性質が理論の予言量
- パワースペクトル

$$\langle \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') \rangle_c = (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(k)$$

- バイスペクトル、高次スペクトル

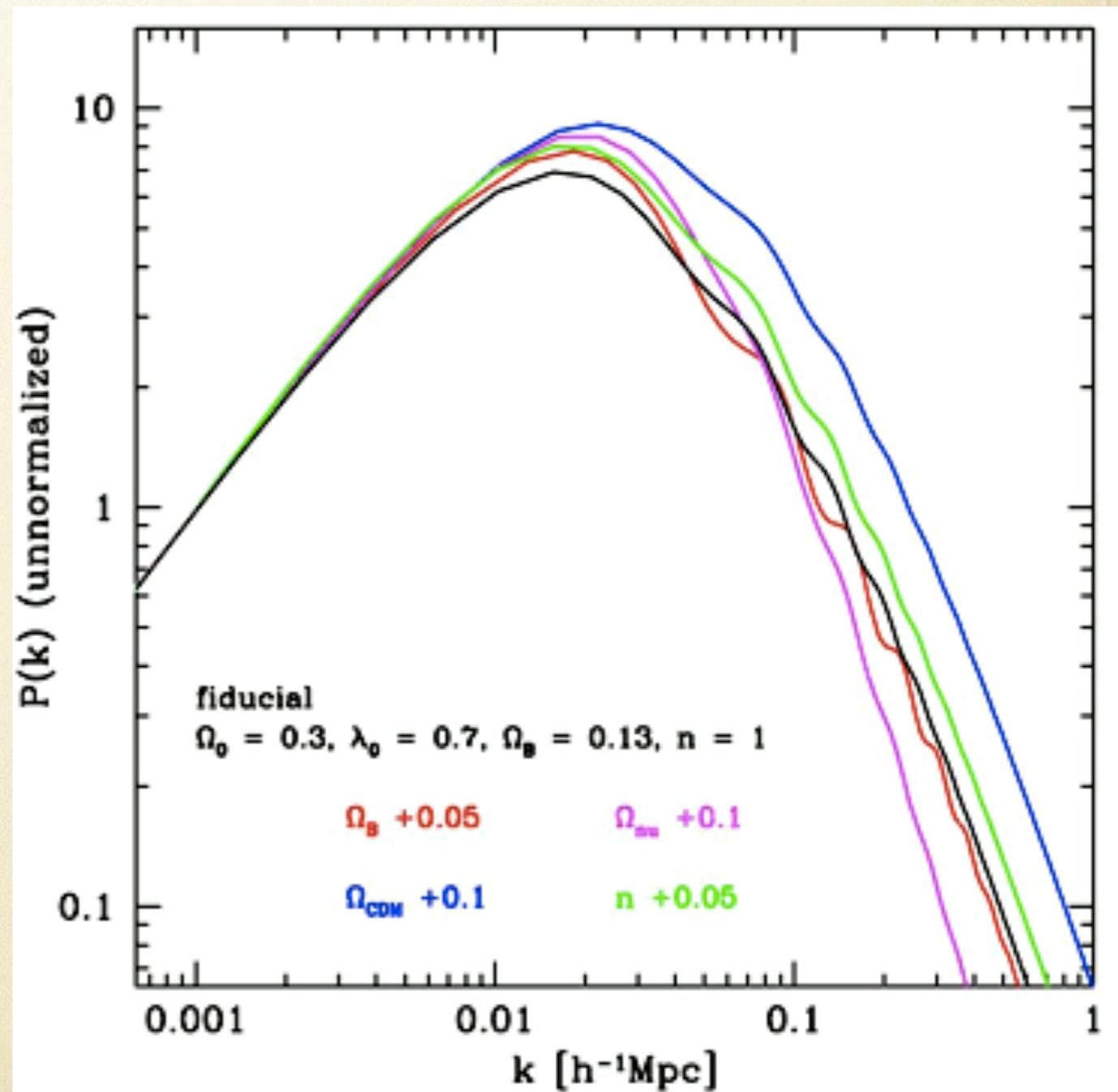
$$\langle \delta(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_3) \rangle_c = (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$$

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}_4) \rangle_c = (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$$

パワースペクトル

- 波長ごとのゆらぎの大きさ (横軸：波数)

- 宇宙論パラメータごとに異なる依存性
- ダークマター量
- バリオン量
- ニュートリノ質量
- 初期ゆらぎ指数
- etc



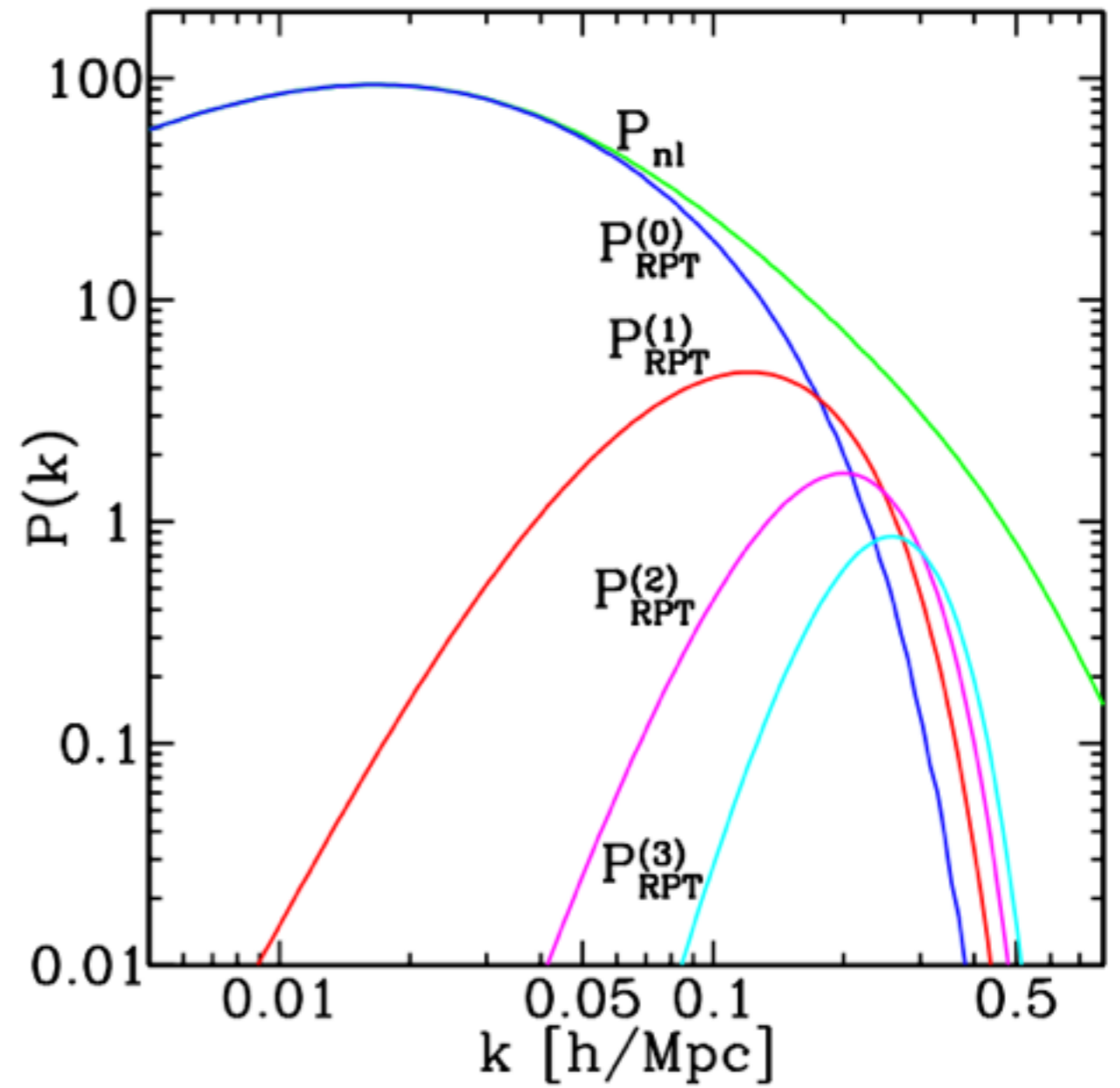
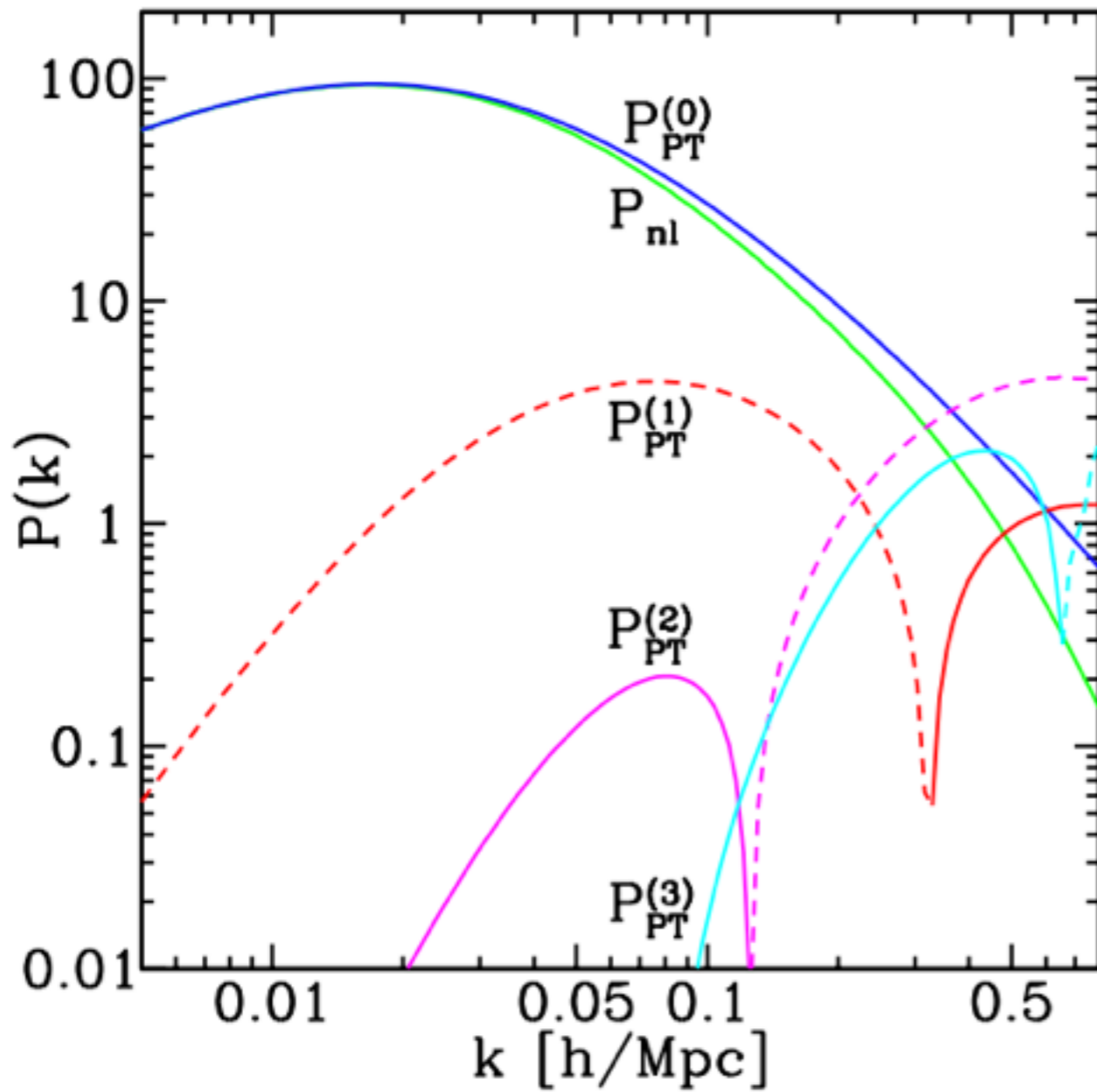
パワースペクトルと摂動論

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{k}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}(\mathbf{k}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3 k_n}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n - \mathbf{k}) \\ &\quad \times F_n(\mathbf{k}_1, \cdots, \mathbf{k}_n) \delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta_L(\mathbf{k}_n)\end{aligned}$$

$$\langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle_c = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle \delta^{(n)}(\mathbf{k}) \delta^{(m)}(\mathbf{k}') \rangle_c \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}&= \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}) \delta^{(1)}(\mathbf{k}') \rangle_c + \langle \delta^{(2)}(\mathbf{k}) \delta^{(1)}(\mathbf{k}') \rangle_c + \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}) \delta^{(2)}(\mathbf{k}') \rangle_c \\ &\quad + \langle \delta^{(3)}(\mathbf{k}) \delta^{(1)}(\mathbf{k}') \rangle_c + \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{k}') \rangle_c \\ &\quad + \langle \delta^{(2)}(\mathbf{k}) \delta^{(2)}(\mathbf{k}') \rangle_c + \cdots\end{aligned} \quad (5.4)$$

パワースペクトルと摂動論



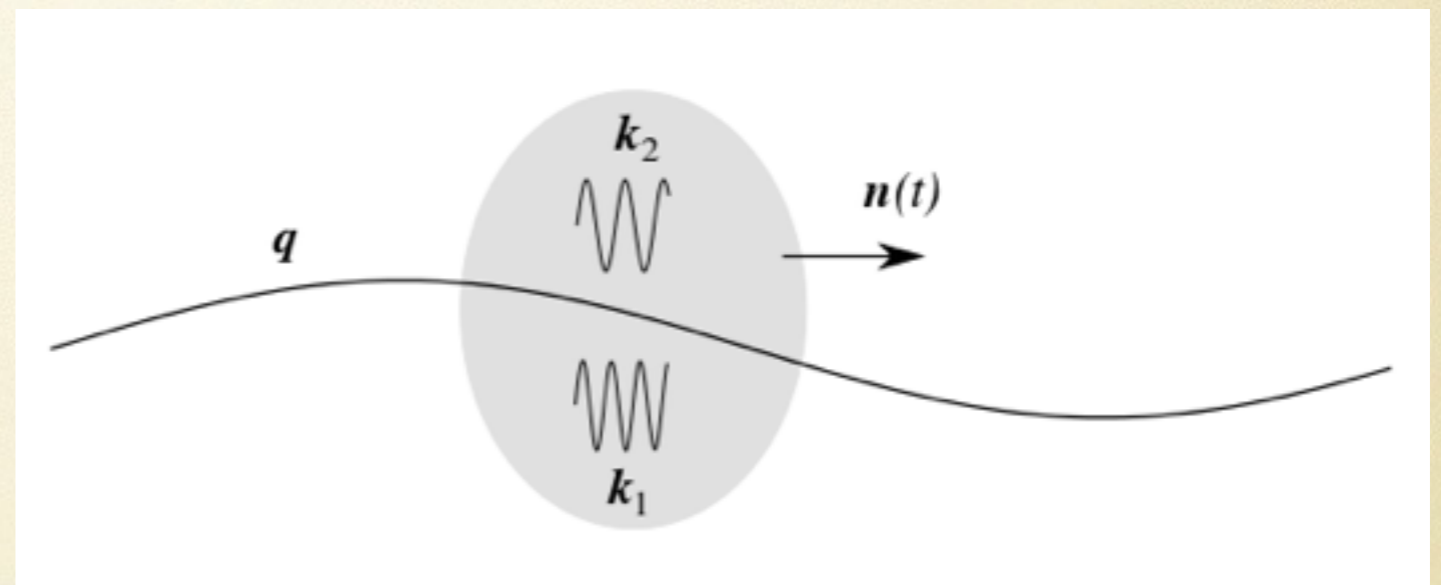
標準摂動論の拡張

- 密度ゆらぎを素直に摂動展開：**SPT (Standard Perturbation Theory)**
- 素直でない方法で摂動展開する手法が続々と提案されている (**SPT**より広い適用領域を目指す)
 - renormalized PT, large-N expansions, (time-)renormalization group approach, closure theory, regularized PT, Lagrangian resummation theory,...
 - effective field theory of large-scale structure
 - ただし、いずれの方法でも強非線形問題が根本的に解けているわけではない

大規模構造の整合性関係式

• Consistency relation of LSS

- 対称性 (Equivalence principle) から線形・非線形に関わらず必ず満たされるべき関係
- \Rightarrow **squeezed limit** 高次相関に対する非摂動論的な関係式



$$\lim_{q \rightarrow 0} P^{(N+1)}(\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N; t, t_1, \dots, t_N)$$

$$= -P(q, t) \sum_{a=1}^N \frac{D(t_a)}{D(t)} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}_a}{q^2} P^{(N)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N; t_1, \dots, t_N)$$

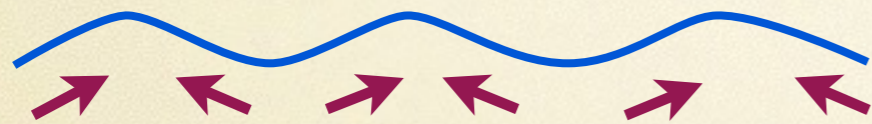
$N = 2$:

$$\lim_{q \rightarrow 0} B(\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t, t_1, t_2) = -P(q, t) \left[\frac{D(t_1)}{D(t)} - \frac{D(t_2)}{D(t)} \right] \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}_1}{q^2} P(k_1; t_1, t_2)$$

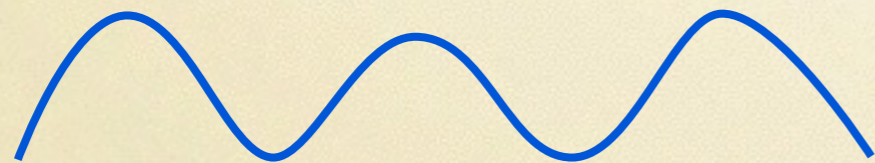
大規模構造の形成

- ゆらぎの線形成長と非線形成長、天体形成

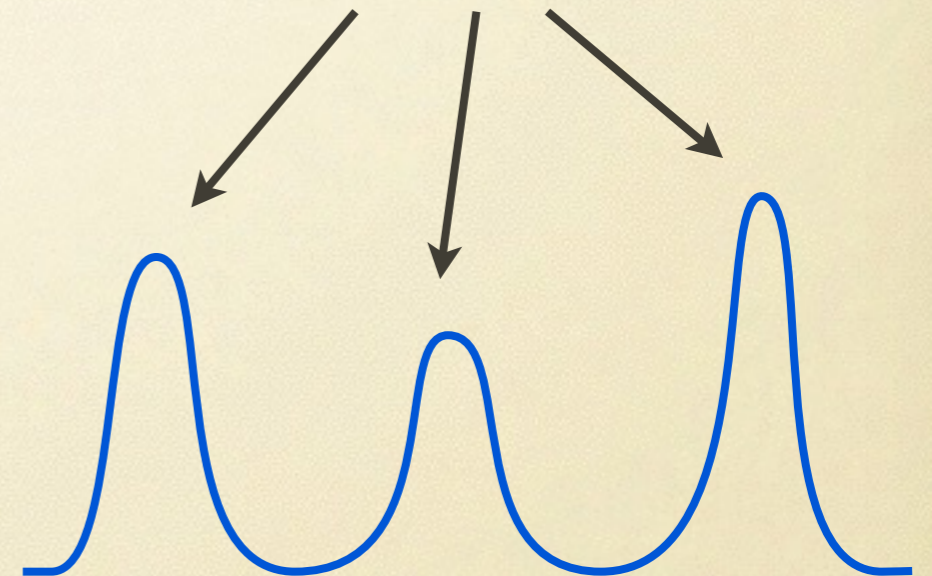
線形成長



非線形成長

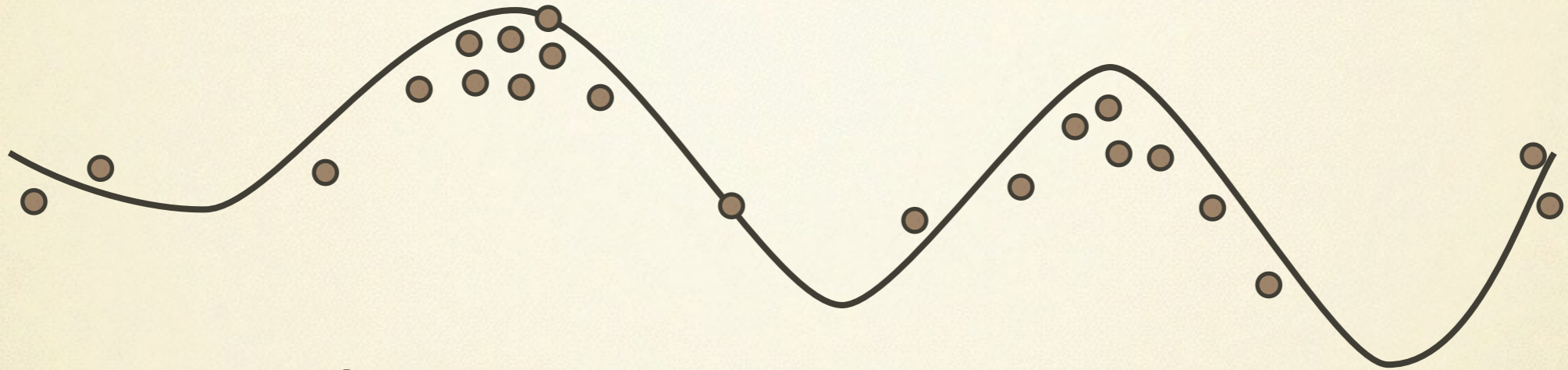


天体形成の場所



⇒ 小スケールのダイナミクスほど解析的取り扱い困難

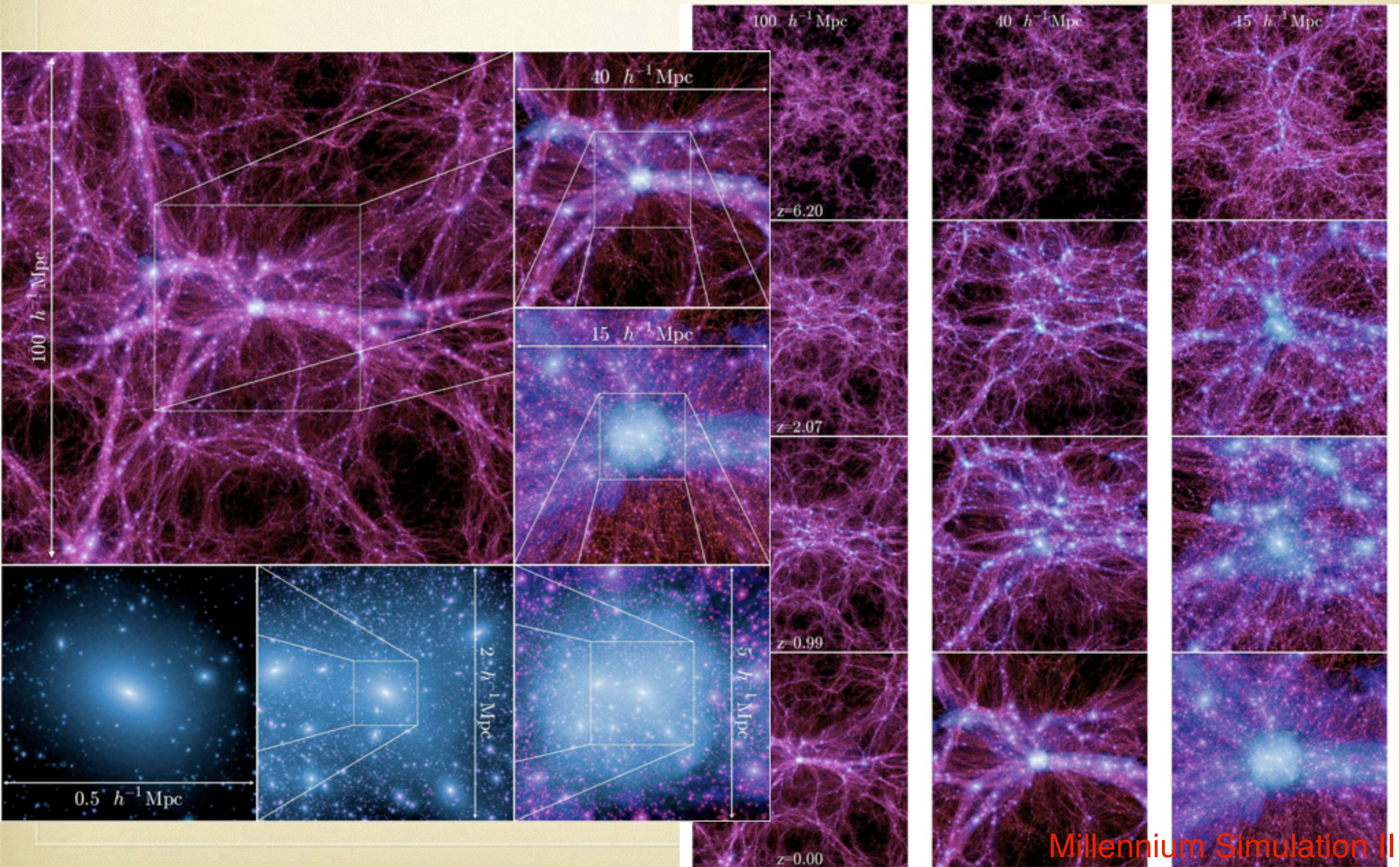
質量と「天体」の間のバイアス



- 質量密度 \neq 天体数密度 (一般に)
- 質量密度と天体数密度はどちらも初期ゆらぎから因果的に決まるが、その関係は強い非線形問題
 - 両者には関係がある：

$$\delta_m(\mathbf{x}) = \frac{\rho_m(\mathbf{x})}{\bar{\rho}_m} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_X(\mathbf{x}) = \frac{\rho_X(\mathbf{x})}{\bar{\rho}_X} - 1$$

例) ハロー・バイアス



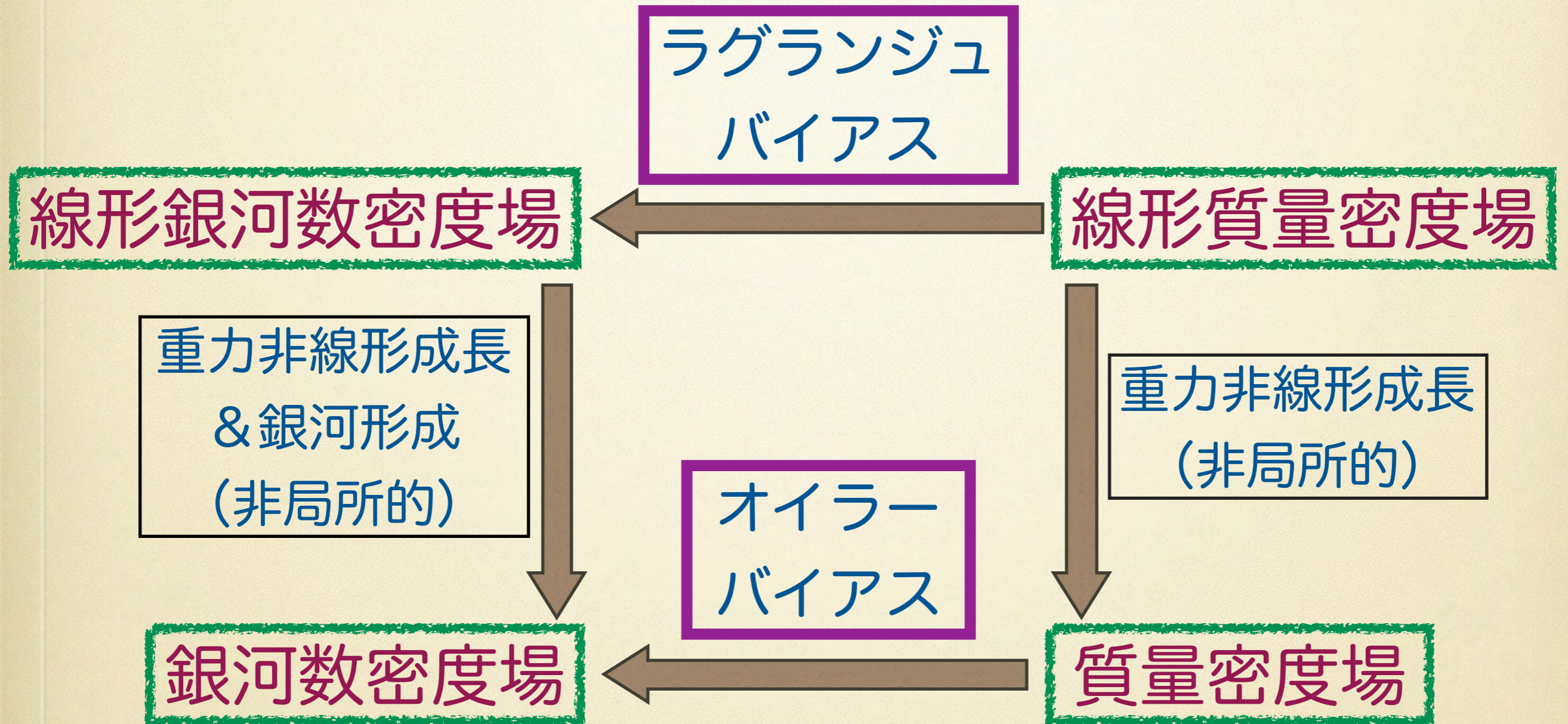
非局所バイアス

- バイアス関数ではなく、バイアス「汎関数」

$$\delta_m = \mathcal{F}_m[\delta_L], \quad \delta_X = \mathcal{F}_X[\delta_L]$$

- 世の中すべて非局所バイアス
 - 局所バイアス：パラメータ化された現象論、大スケール極限
 - 天体形成は局所的には決まらない物理過程
 - 重力非線形成長：初期ゆらぎの非局所バイアス過程

オイラーバイアスとラグランジュバイアス



非局所バイアスの枠組みでは、オイラーバイアスとラグランジュバイアスは表現が異なるのみ

くり込まれたバイアス関数

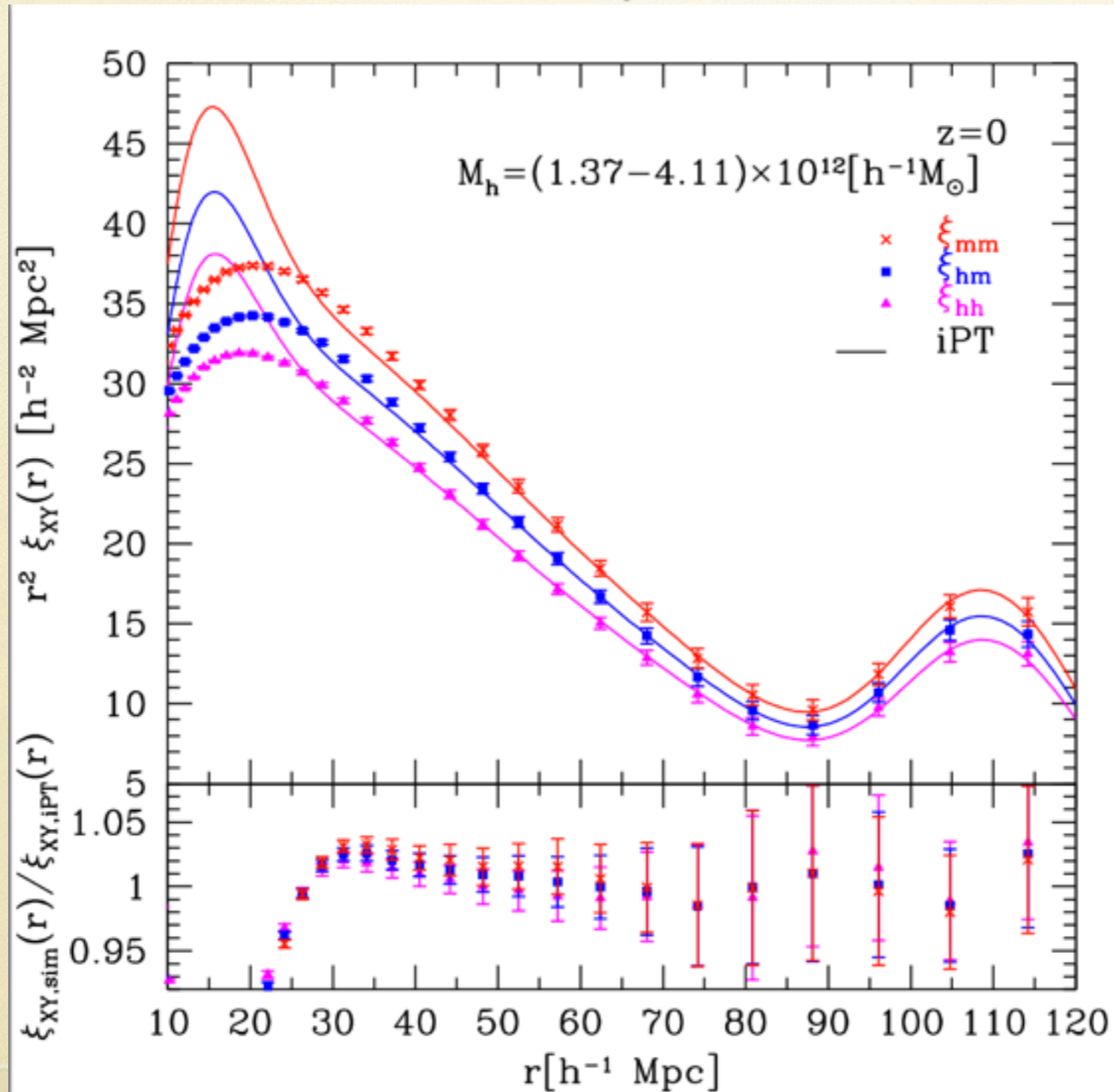
- くり込まれたバイアス関数 (TM2011)
 - Renormalized bias functions
 - 非局所バイアスの特徴づける重要な関数群

$$c_n^L(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = (2\pi)^{3n} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\langle \frac{\delta^n \delta_X^L(\mathbf{k})}{\delta\delta_L(\mathbf{k}_1) \cdots \delta\delta_L(\mathbf{k}_n)} \right\rangle,$$

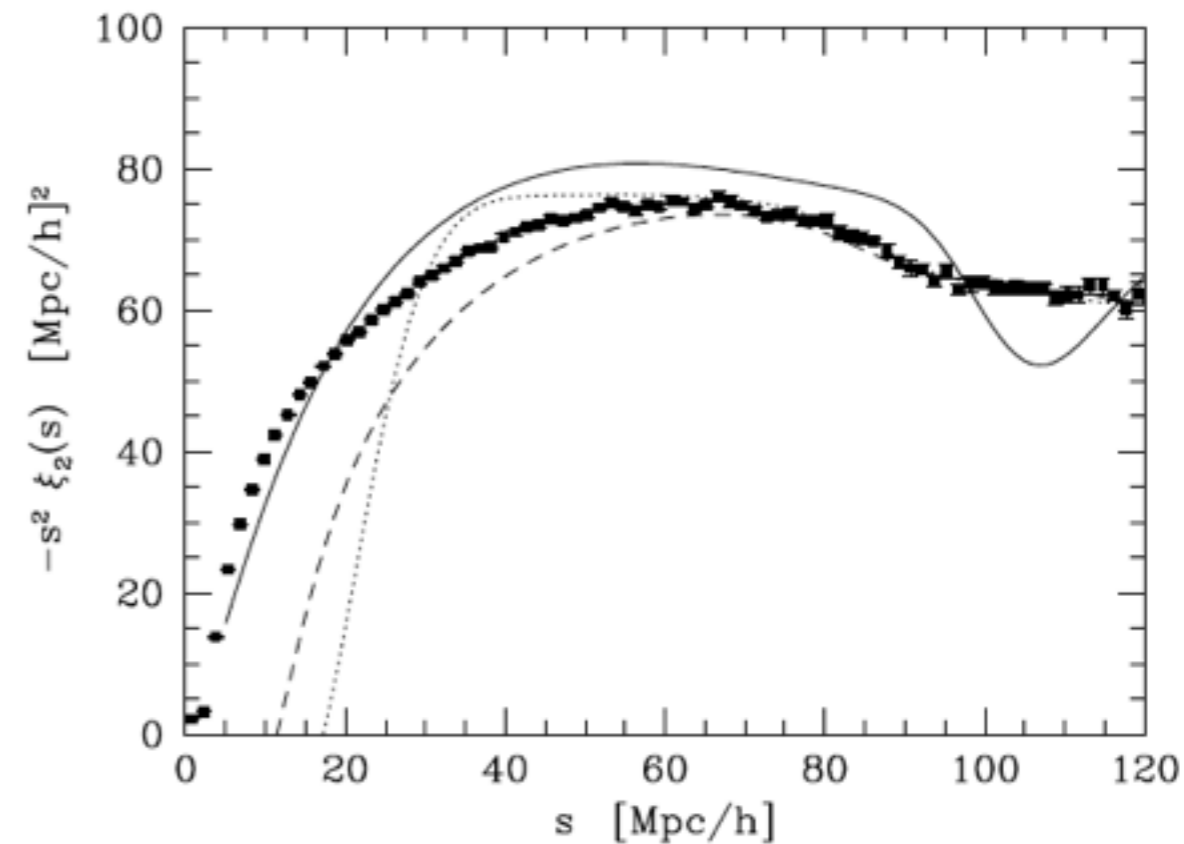
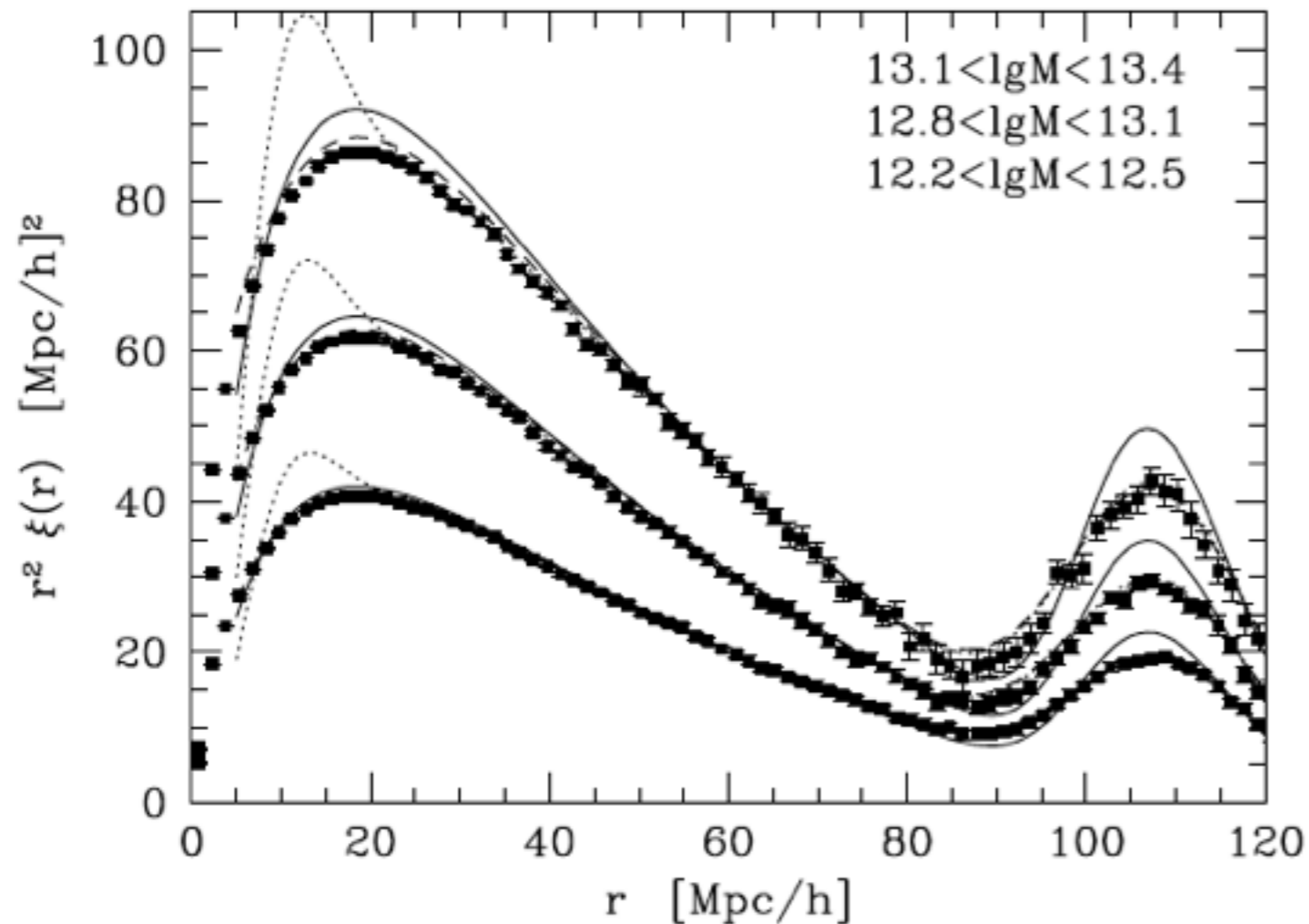
- この量にバイアスの不定性はすべて繰り込まれ、摂動論に組み込むことが可能
- \Rightarrow integrated Perturbation Theory (iPT)
- 大スケールでは、上の関数の大スケール極限だけでほとんどの問題に対応可能 (but for NG bias)

ハロー相関関数 (auto & cross)

- iPT と シミュレーション FOF halos との比較



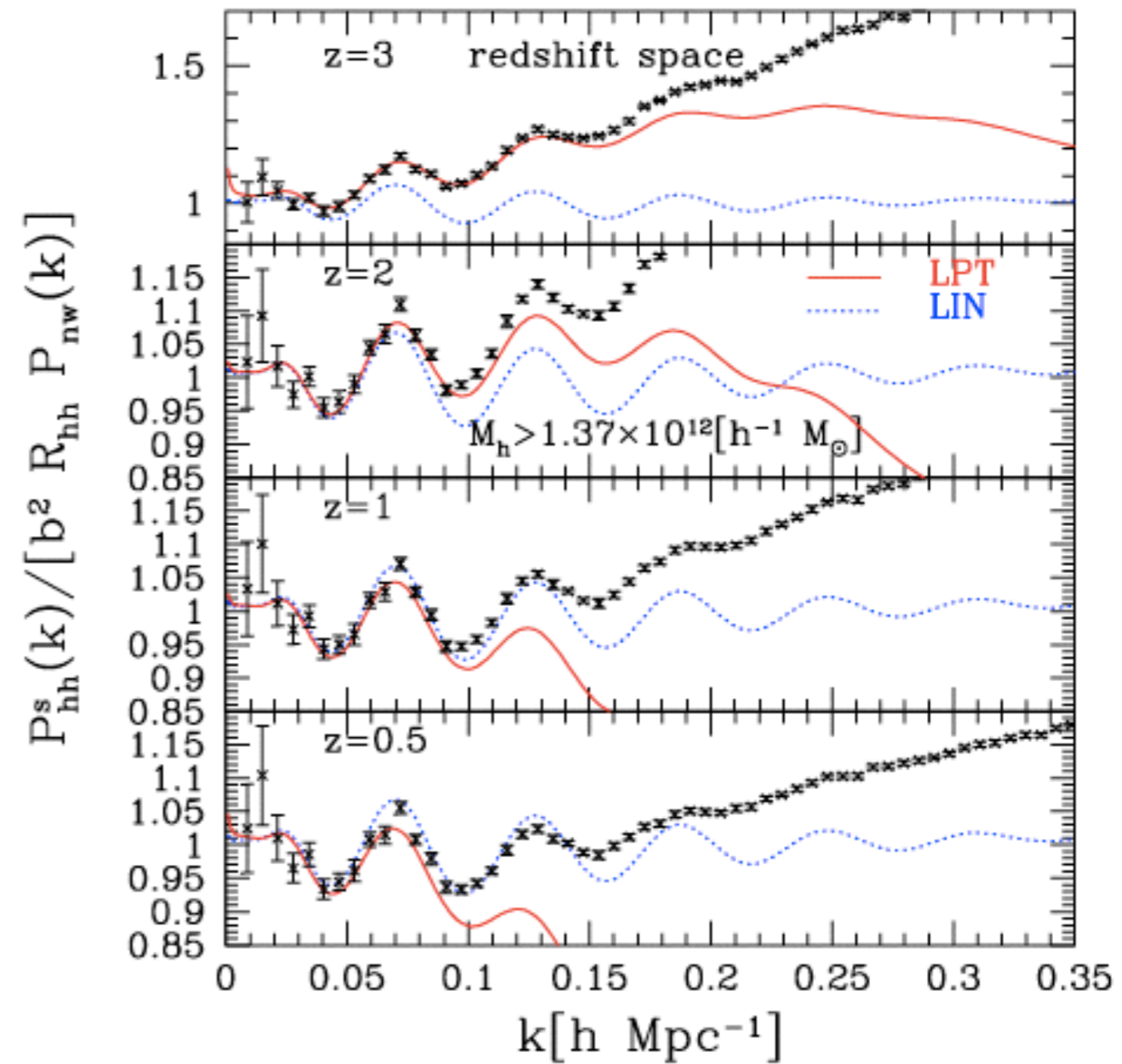
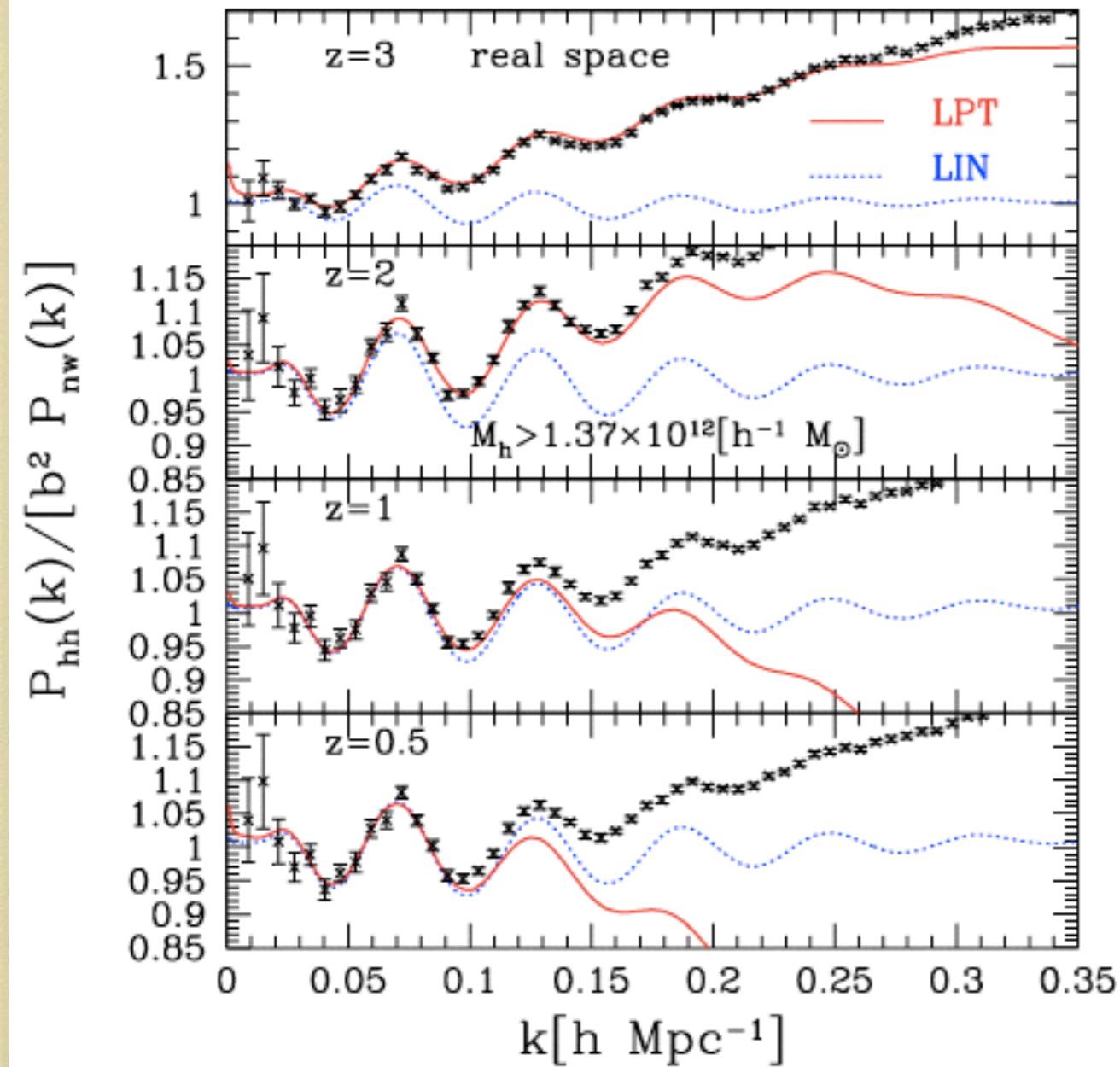
一口一相関関数 (auto)



Carlson et al. (2013)
CLPT

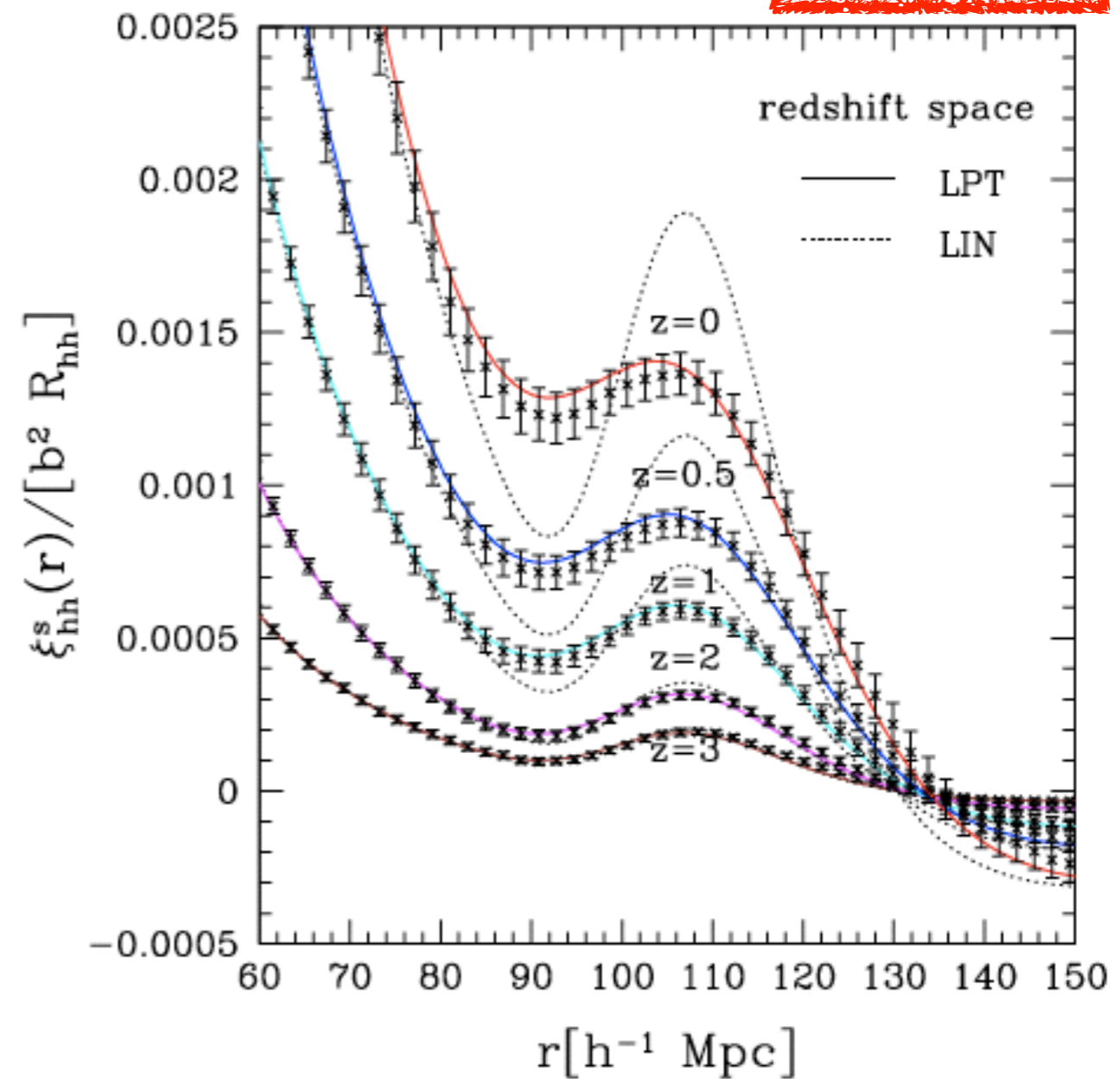
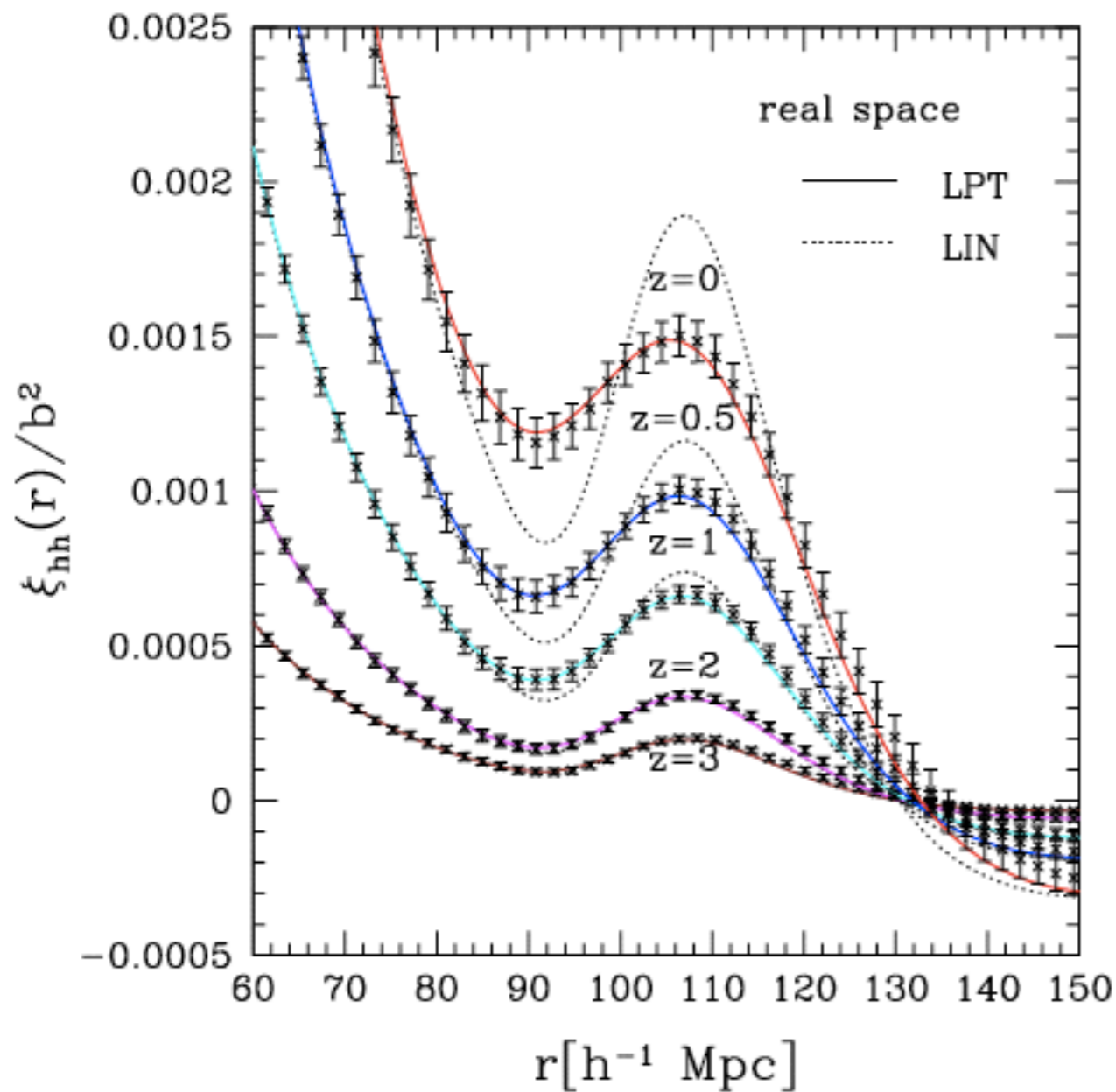
ハロー・パワースペクトル

One-loop



ハローのクラスタリング： ラグランジュ再和法による相関関数

One-loop



CMB

2次摂動論概略



by 嗟峨君

宇宙論的2次摂動論の特にCMBに対する発展について簡単にまとめた。
現在までに、主に以下の流れで定式化が行われてきた。

1. 衝突項の一部の寄与の計算 (Ostriker-Vishniac effect)
2. 偏光を無視した衝突項のすべての寄与の定式化と意味付け
3. 偏光を無視したボルツマン方程式の定式化
4. 偏光を考慮した衝突項の定式化
5. 2次摂動論に対する理論的な研究
6. 2次ボルツマンコード

本スライドは、以上の流れに沿ってまとめた。

ボルツマン方程式

まず, コンプトン散乱を行うCMB光子は衝突ボルツマン方程式で記述される。
各項の意味は次の通りである。

$$\frac{\partial f_{ab}}{\partial t} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial f_{ab}}{\partial x^i} + \frac{dp}{d\eta} \frac{\partial f_{ab}}{\partial p} + \frac{d\hat{n}^i}{d\eta} \frac{f_{ab}}{\partial \hat{n}^i} = C_{ab}[f]$$

偏光 (Red box around f_{ab})

重力項①(自由流項+時間遅れ項) (Green box around $\frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial f_{ab}}{\partial x^i}$)

重力項②(重力赤方偏移項) (Green box around $\frac{dp}{d\eta} \frac{\partial f_{ab}}{\partial p}$)

重力項③(重力レンズ項) (Green box around $\frac{d\hat{n}^i}{d\eta} \frac{f_{ab}}{\partial \hat{n}^i}$)

衝突項 (Blue box around $C_{ab}[f]$)

2次のCMBを見たい場合

- ① 衝突項
- ② 重力項
- ③ 偏光
- ④ ボルツマンコード

すべてに対して2次まで展開して定式化する必要がある。
歴史的には, ①→②→③の順で定式化されていた。

次からその流れに沿って説明を行う。

1. 衝突項の一部の寄与の計算 (Ostriker-Vishniac effect)

1986年 Ostriker and Vishniac

Ostriker and Vishniac [*ApJ* 306 (July, 1986) L51-L54]

Ostriker-Vishniac(OV)効果は、再電離後の自由電子の密度場のゆらぎと速度場のゆらぎのためにドップラー効果を受けることによって引き起こされる2次的な温度ゆらぎである。

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)^{(2)} = - \int_0^{t_0} \underline{n_e^{(1)}} \sigma_T e^{-\tau} \left(\hat{\gamma} \cdot \underline{v^{(1)}}\right) dt$$

OstrikerとVishniacは、 $\theta \sim 1'$ ($l \sim 10^4$)より小スケールでprimary CMBより大きくなることを発見した。

OV効果の存在が指摘される以前は、通常2次の効果は小さいと考えられていた。

しかし、線形摂動においてCMBの温度ゆらぎは拡散減衰でかき消されてしまう。

そのため、小スケールではこのような2次の効果が支配的になることが示された。

- △ ① 衝突項
- ② 重力項
- ③ 偏光
- ④ ボルツマンコード

CMBの角度パワースペクトルの計算例(sCDMモデル)

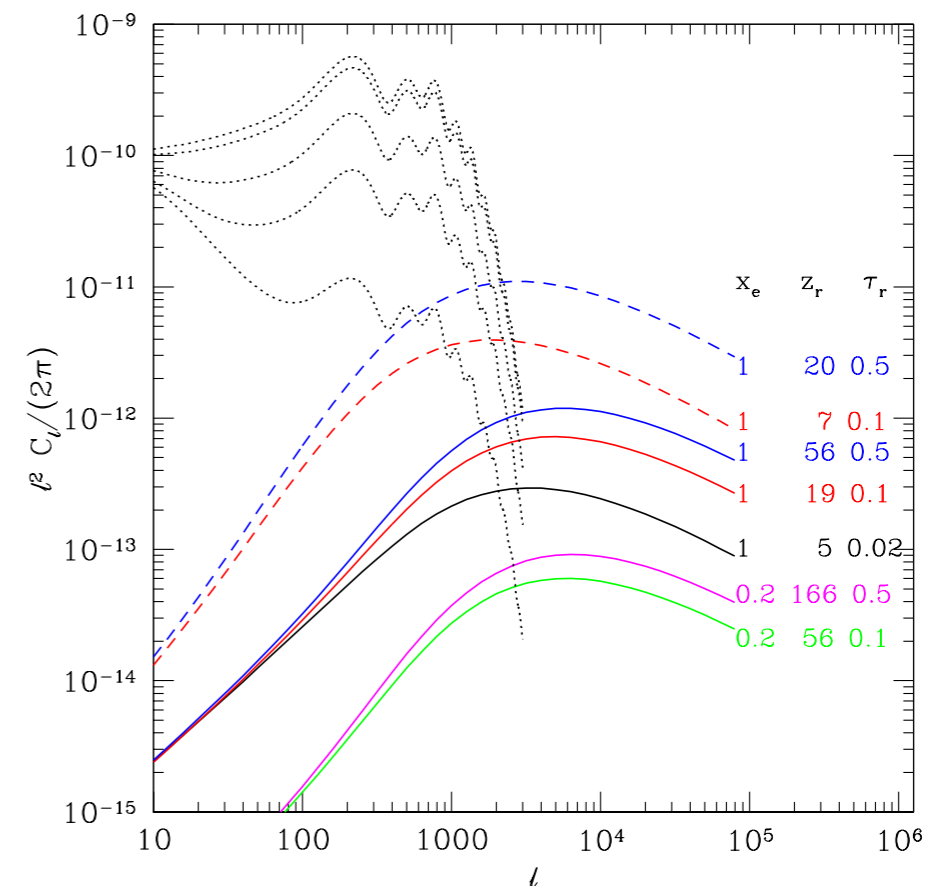


FIG. 1. Multipole moments for the Ostriker-Vishniac effect for the COBE-normalized canonical standard-CDM model ($\Omega = 1$, $h = 0.5$, $n = 1$, $\Omega_b h^2 = 0.0125$), for a variety of ionization histories, as listed. We also show predictions for several open high-baryon-density models with the same x_e and τ_r , normalized to the cluster abundance, with dashed curves. The dotted curves show the primary anisotropy for this model for $\tau_r = 0.0, 0.1, 0.5, 1$, and 2 , from top to bottom.

A.H.Jaffe and M.Kamionkowski [*Phys.Rev.* D58 (1998) 043001]

2. 偏光を無視した衝突項のすべての寄与の定式化と意味付け

1994年 Hu et al.

W.Hu, D.Scott, J.Silk [[Phys.Rev. D49](#) (1994) 648-670]

OV効果はあくまで衝突項の一部の寄与にすぎない。

Huらは衝突項を偏光を無視する仮定のもとで, その他の項を2次まで完全に導出した。

さらに, Huらは複雑な2次の衝突項に対して, 物理的な解釈のもとでそれぞれ分離して最も支配的であると考えられる項からの寄与を見積もった。

これまで, OV効果はあくまで2次の部分的な項でしかなく, 他の2次の衝突項からくる寄与とキャンセルする可能性は否定できないでいた。

しかし, Huらは近似的な見積もりによりその可能性を排除し, CMB温度ゆらぎに与える影響のうち支配的な項はOV効果が主であることを示した。

- ① **衝突項**
- ② **重力項**
- ③ **偏光**
- ④ **ボルツマンコード**

3. 偏光を無視したボルツマン方程式の定式化

2000年~2008年

Huらの見積もりはあくまでボルツマン方程式の右辺の衝突項のみに焦点を当てている。その後、左辺の重力項に対しても2次まで展開した定式化が多くの人々によって行われた。

N.Bartolo, S.Matarrese, A.Riotto [[JCAP 0606 \(2006\) 024](#)]

N.Bartolo, S.Matarrese, A.Riotto [[JCAP 0701 \(2007\) 019](#)]

D.Nitta, E.Komatsu, N.Bartoro, S.Matarrese, A.Riotto [[JCAP 0905 \(2009\) 014](#)]

L.Senatore, S.Tassev, M.Zaldarriaga [[JCAP 0908 \(2009\) 031](#)]

...

特に、光子のボルツマン方程式に限らずバリオン、ダークマターなどの2次の方程式も定式化された。

このあたりで重力レンズの項も統一的に定式化がなされたが、重力レンズはCMBの偏光Bモードを作ることが知られていた。

そのため、remapping approachとして重力レンズの項は独立にCMB偏光を計算するために既に取り入れられていた。

W.Hu [[Phys.Rev. D62 \(2000\) 043007](#)]

- ① 衝突項
- ② 重力項
- ③ 偏光
- ④ **ボルツマンコード**

4. 偏光を考慮した衝突項の定式化

2008年~2011年

ここまでの定式化はすべて光子の偏光を無視した取り扱いとなっていた。

Pitrou, Benekeらが主に光子の偏光も含めた定式化を行った。

C.Pitrou, [[Class.Quant.Grav.](#) **26** (2009) 065006]
C.Pitrou, [[Gen.Rel.Grav.](#) **41** (2009) 2587-2595]
C.Pitrou, J-P.Uzan, F.Bernardeau [[JCAP](#) **1007** (2010) 003]
M.Beneke, C.Fidler [[Phys.Rev.](#) **D82** (2010) 063509]
...

ここまでで、ようやく2次CMBを計算するための定式化が完了した。

しかし、CMBの角度パワースペクトルを求めたいときに高次の多重極まで求めて階層方程式を求めてやる必要がある。

線形理論の場合は、視線方向積分によってこの問題は解消されていたがそれに対応する公式が2次のボルツマン階層方程式にはこの時は存在していなかったため安定して2次CMBを計算するコードはまだなかった。

- ① 衝突項
- ② 重力項
- ③ 偏光
- △ ④ ボルツマンコード

5. 2次摂動論に対する理論的な研究①

2011年~現在

2次摂動論の理論的な研究も最近盛んに行われている。

- 2次摂動論の変数のゲージ依存性とゲージ不変量の議論 [A.Naruko et al, \[Class.Quant.Grav. 30 \(2013\) 165008\]](#)
そもそも2次摂動論におけるゲージ自体よく議論されておらず、ほとんどすべての先攻研究ではPoissonゲージをとっていた。
彼らは、初めてゲージを固定することなく2次ボルツマン方程式を導いた。
- 2次CMBを計算するための理論(次ページ)
線形理論において、CMBは視線方向積分という公式で高次の多重極まで容易に得ることができた。
しかし、2次CMBの場合そのような公式が一部に適用できず、完全なシグナルを計算することが困難である。
この視線方向積分に対応するような公式や定式化がいくつかなされた。
次ページで少し詳しく説明する。

5. 2次摂動論に対する理論的な研究②

$$\frac{\partial f_{ab}}{\partial t} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial f_{ab}}{\partial x^i} + \frac{dp}{d\eta} \frac{\partial f_{ab}}{\partial p} + \frac{d\hat{n}^i}{d\eta} \frac{f_{ab}}{\partial \hat{n}^i} = C_{ab}[f]$$

偏光
重力項①(自由流項+時間遅れ項)
重力項②(重力赤方偏移項)
重力項③(重力レンズ項)
衝突項

CMBを計算するために必要な項

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 1. Redshift term | 2次温度ゆらぎの再定義で消せる |
| 2. Time-delay term | 計算できず |
| 3. Lensing term | Remapping formalism |
| 4. Collision term | 視線方向積分 |

①Transport operator formalism C.Fidler et al, [[JCAP 04 \(2015\) 037](#)]

すべての非線形な寄与を一つのtransport operatorに押し込んで、この演算子を逐次的に摂動展開する。

②Curve-of-sight formalism R.Saito et al, [[JCAP 10 \(2014\) 051](#)]

摂動のかかった光子の軌跡に沿った積分を行うことで(curve-of-sight)重力的な寄与を含んだ視線方向積分を行った。Remapping formalismの一般化とも言える。

これらの定式化は今後の2次BoltzmannCodeに導入される予定である。

6. 2次ボルツマンコード

現在

2次ボルツマンコードの現状についてまとめた

- CosmoLib 2nd [Z.Huang and F.Vernizzi, \[Phys.Rev.Lett. 110 \(2013\) 101303\]](#)
Time-delay termとLensing項は無視
Fortran
非公開
- CMB quick2 [C.Pitrou et al, \[JCAP 1007 \(2010\) 003\]](#)
Time-delay termとLensing項は無視
Mathematica
非公開
- SONG [G.W.Pettinari et al, \[JCAP 04 \(2013\) 003\]](#)
Transport operator formalismを利用
C (CLASSを基礎にしている)
公開予定(時期未定)
- 和製コード [T.Hiramatsu, R.Saito, A.Naruko, M.Sasaki, \[in production\]](#)
Curve-of-sight formalismを利用
C++
非公開

7. SONG

現在

現在のコードで最も安定かつすべての寄与を取り入れていると、(個人的に)思っている SONGの主な結果についてまとめる

G.W.Pettinari et al, [[JCAP 04 \(2013\) 003](#)]

- 2次的に作られるCMBの非ガウス性は $f_{\text{NL}} \sim 0.5 \langle a_{\ell_1, m_1}^L a_{\ell_2, m_2}^L a_{\ell_3, m_3}^{\text{NL}} \rangle \propto \langle \Phi^{(1)} \Phi^{(1)} \Phi^{(1)} \Phi^{(1)} \rangle$
- 2次的に作られるCMB B-modeは $l \sim 100$ で $r \sim 10^{-7}$ 相当 [C.Fidler et al, \[JCAP 07 \(2014\) 011\]](#)

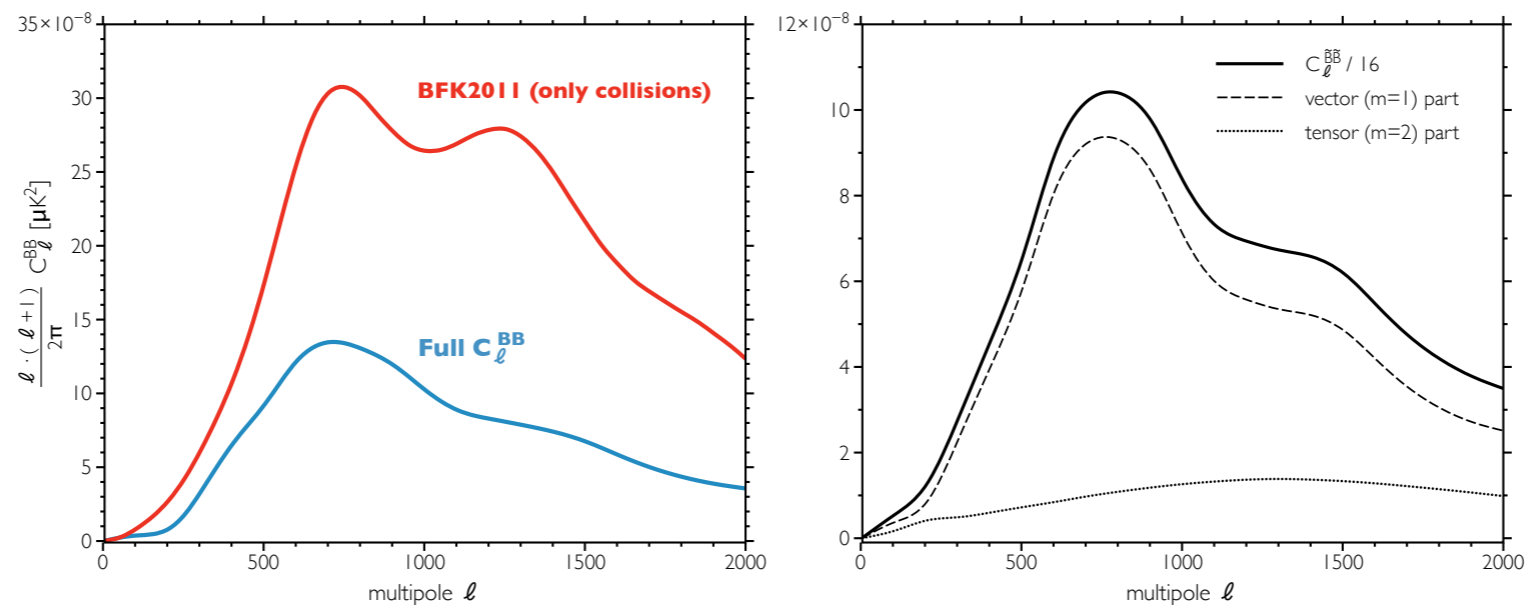


Figure 2: *Left panel:* Comparison of the full intrinsic B-modes (solid blue curve) with a calculation including only collision effects and neglecting both the redshift and bolometric temperature corrections (solid red curve). The latter curve is consistent with what is computed by [BFK2011](#). *Right panel:* The power spectrum C_ℓ^{BB} (solid black curve) split into vector (dashed black curve) and tensor (dotted black curve) contributions.

8. 年表

2008年~2011年

2000年~2008年

1980年~2000年

$$\frac{\partial f_{ab}}{\partial t} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial f_{ab}}{\partial x^i} + \frac{dp}{d\eta} \frac{\partial f_{ab}}{\partial p} + \frac{d\hat{n}^i}{d\eta} \frac{f_{ab}}{\partial \hat{n}^i} = C_{ab}[f]$$

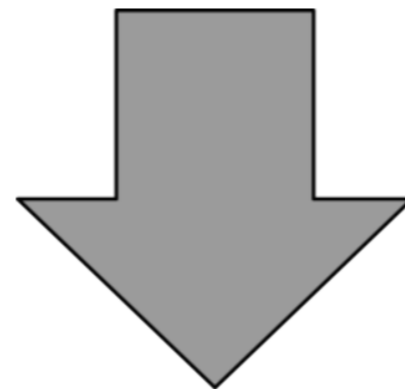
偏光

自由流項+時間遅れ項

重力赤方偏移項

重力レンズ項

衝突項



2013年~

理論

ゲージ
求積法

2014年~

2次ボルツマンコード

CosmoLib 2nd
CMB quick2
SONG
和製コード