小さい磁気プラントル数でのスモールスケールダイナモ

望月 星那 (甲南大学大学院 物理学研究科)

Abstract

この発表では Schober et al(2012) のレビューをおこなう。宇宙初期の磁場はおそらく極端に弱かったが、現在の宇宙は強く磁化されている。この何桁にもわたる磁場の強さの成長を説明するために、速い増幅プロセスが働く必要がある。今日知られている最も効果的なメカニズムはスモールスケールダイナモとよばれるもので、乱流の運動エネルギーを磁場のエネルギーにかえるものである。その効率は、乱流スペクトルのべきに依存する。この研究では、非圧縮のコルモゴロフ乱流から、圧縮性の高いバーガーズ乱流までの乱流スペクトルを調べ、低い磁気プラントル数 Pm(磁気レイノルズ数 Rm とレイノルズ数 Re の比) で起こる乱流磁場の特性を分析した。彼らは、カザンツェフ方程式 (乱流磁場の進化を記述する方程式) を WKB 近似を用いて解いた。低い磁気プラントル数の極限で磁場の成長率は Rm の $(1-\vartheta)\,/\,(1+\vartheta)$ 乗に比例する。ここで、δ は乱流スペクトルのべきである。彼らはさらに、乱流磁場が成長するための臨界磁気レイノルズ数 Rm_{crit} はだいたいコルモゴロフ乱流では 100 でバーガーズ乱流では 2700 であることを明らかにした。また、もし磁気レイノルズ数が十分大きければ、低い磁気プラントル数のもとでスモールスケールダイナモが働くことがわかった。小さいスケールでの磁場の増幅は幅広い範囲の天体物理的環境で起こり、弱い磁場を短い時間のスケールで増幅することができるのである。

1 Introduction

いろいろな宇宙物理学的な現象は強い磁場を伴うものである。しかし、その磁場の宇宙論的起源はあまりあきらかではなく、非常に弱い磁場しか生成されない。したがって効率的な増幅のプロセスが必要である。磁気流体力学的なダイナモは弱い磁場を増幅させる効果的なメカニズムである。特に、スモールスケールでの乱流のダイナモは乱流の運動エネルギーを磁場のエネルギーに短い時間のスケールで転換するので重要である。スモールスケールダイナモがどのように働くかは磁気プラントル数に依存する。磁気プラントル数は、磁気レイノルズ数をレイノルズ数でわったものである。宇宙における様々な現象を考えると、磁気プラントル数は幅広い範囲におよんでいる。初期宇宙で初代星が生まれる環境や現在の銀河間空間では磁気プラントル数が 10^{12} に達している。現在の星間空間や惑星間空間では磁気プラントル数が 10^{-2} から 10^{-7} しかない。

これまでの研究では理想的なコルモゴロフ乱流しか分析されなかった。が、宇宙のプラズマはたいてい圧縮性が高い。したがって圧縮性の乱流の場合にもしらべる必要がある。また、磁気プラントル数が無限大でスモールスケールダイナモがどのように働くかがよく研究されていたが、磁気プラントル数 0 でスモールスケールダイナモがどのように働くかはこれまで調べられていないこの研究では、非圧縮から圧縮性まで様々な乱流スペクトルについて低い磁気プラントル数での乱流磁場の成長をしらべる。乱流磁場の進化を記述するカザンツェフ方程式を WKB 近似を使って解き、磁気プラントル数が小さいときの磁場の成長率を得る。

2 Kazantsev equation

乱流と磁場を平均からのずれとして表す。

$$v = \langle v \rangle + \delta v$$

$$B = \langle B \rangle + \delta B$$

乱流の相関関数を次のように表す。

$$\langle \delta v_i\,(r_1, t)\,\delta v_j\,(r_2, s)\rangle = T_{ij}\,(r)\,\delta\,(t-s)$$

乱流の相関関数を横成分と縦成分の和として表す。

$$T_{ij}(r) = \left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}\right) T_N(r) + \frac{r_i r_j}{r^2} T_L(r)$$

Phys.Rev.E85,026303 によると、横成分と縦成分は次のようになる。

$$T_N(r) = \begin{cases} \frac{VL}{3}\left[1 - t(\vartheta)\, Re^{(1-\vartheta)/(1+\vartheta)} \left(\frac{r}{L}\right)^2\right], \\ \frac{VL}{3}\left[1 - t(\vartheta) \left(\frac{r}{L}\right)^{\vartheta+1}\right] \\ 0, \end{cases}$$

$$T_L(r) = \begin{cases} \frac{VL}{3}\left[1 - Re^{(1-\vartheta)/(1+\vartheta)} \left(\frac{r}{L}\right)^2\right], \\ \frac{VL}{3}\left[1 - \left(\frac{r}{L}\right)^{\vartheta+1}\right] \\ 0, \end{cases}$$

この 3 つの式は、上から順に、$0 < r < l_v$、$l_v < r < L$、$L < r$ の場合である。L は最も大きなうずの長さで l_v は乱流の切り落としのスケールである。一方で、磁場の相関関数は次のようになる。

$$\langle \delta B_i(r_1, t)\, \delta B_j(r_2, t) \rangle = M_{ij}(r)$$

磁場の相関関数を横成分と縦成分の和として表す。

$$M_{ij}(r, t) = \left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}\right) M_N(r, t) + \frac{r_i r_j}{r^2} M_L(r)$$

この乱流と磁場の関係は誘導方程式で表される。

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (v \times B) - \eta \nabla \times (\nabla \times B)$$

これらをくみあわせると、

$$\frac{\partial M_L}{\partial t} = 2\kappa_{diff} M_L{}'' + 2\left(\frac{4\kappa_{diff}}{r} + \kappa_{diff}{}'\right) M_L{}' + \frac{4}{r}\left(\frac{T_N}{r}\right.$$

が得られる。ただし、$\kappa_{diff}(r) = \eta + T_L(0) - T_L(r)$ である。$T_N(r)$ は乱流の相関関数の横成分、$T_L(r)$ は乱流の相関関数の縦成分、$M_N(r, t)$ は磁場の相関関数の横成分、$M_L(r, t)$ は磁場の相関関数の縦成分である。

$$M_L(r, t) \equiv \frac{1}{r^2 \sqrt{\kappa_{diff}}} \psi(r)\, e^{2\Gamma t}$$

とおくと、

$$-\kappa_{diff}(r) \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + U(r)\, \psi(r) = -\Gamma \psi(r)$$

となる。これをカザンツェフ方程式という。Γ が磁場の成長率であり、$\psi(r)$ は固有関数である。

3 Growth rate in the limit of small magnetic prandtl numbers

カザンツェフ方程式の基底状態の固有関数に興味がある。磁場が成長する為には実数の固有値でなければならない。そのためにはポテンシャルは負でなければならない。図 1 は、規格化されたポテンシャルをコルモゴロフ乱流とバーガーズ乱流について y=r/L の関数としてのグラフである。レイノルズ数は 10^8 を選んだ。これは、惑星の内部と宇宙最初のダークマターハローの典型的な値である。磁気レイノルズ数が 10^4 と 10^5 と 10^6 の場合について示した。これは、磁気プラントル数が 10^{-4} と 10^{-3} と 10^{-2} の場合である。

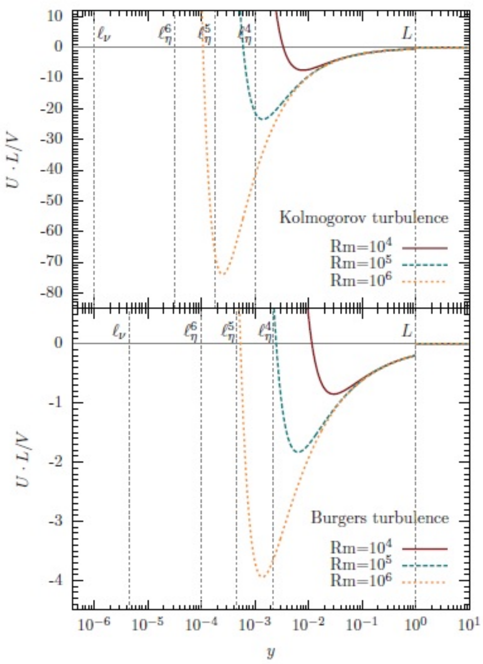

図 1: 縦軸は U-L/V で横軸は r/L である。上はコルモゴロフ乱流で、下はバーガーズ乱流である。出典 Phys.Rev.E85,066412small-scale dynamo at low magnetic Prandtl numbers

図 2 は、レイノルズ数を 10^8 としたときの小さい磁気プラントル数から中程度の磁気プラントル数での磁場の成長率をグラフにしたものである。図 3 は、

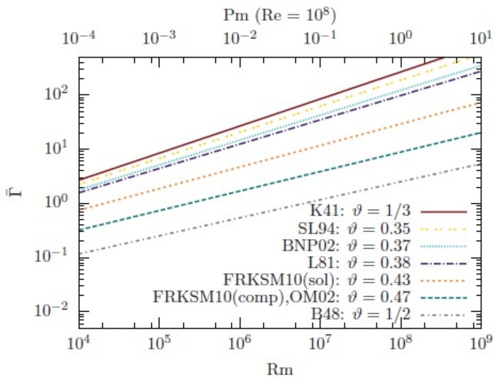

図 2: 出典　Phys.Rev.E86,066412 "Small-scale dynamo at low magnetic Prandtl numbers"

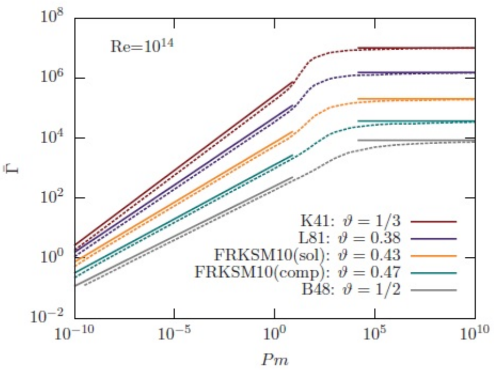

図 3: 出典　Phys.Rev.E86,066412 "Small-scale dynamo at low magnetic Prandtl numbers"

レイノルズ数を 10^{14} としたときの小さい磁気プラントル数から大きな磁気プラントル数での磁場の成長率をグラフにしたものである。これから、小さい磁気プラントル数では、磁場の成長率は磁気レイノルズ数のべきになっていることがわかる。その依存度は $\Gamma \propto Rm^{\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta}}$ である。

臨界磁気レイノルズ数は磁場の成長率が 0 となる磁気レイノルズ数であるので、その関係からもとめることができる。乱流の種類によって値はかわるが、100 から 2700 程度であることが求められた。

4　Conclusion

スモールスケールダイナモの成長率をカザンツェフ方程式を使って小さい磁気プラントル数から中程度の磁気プラントル数まで決めた。成長率は $Rm^{((1-\vartheta)/(1+\vartheta))}$ に比例することを見つけた。スモールスケールダイナモのふるまいの臨界磁気レイノルズ数はだいたいコルモゴロフ乱流の 100 からバーガーズ乱流の 2700 までの範囲である。臨界磁気レイノルズ数は、そこを越えれば磁場が成長し、越えなければ磁場が成長しないという境目のところである。

5　参考文献

Phys.Rev.E86,066412 small scale dynamo at low magnetic Prandtl numbers[Schober(2012)]