

負の圧力への応用に向けたゴドノフ SPH 法の改良

杉浦 圭祐 (名古屋大学大学院 理論宇宙物理学研究室)

Abstract

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法は流体力学の数値計算手法の一種である。SPH 法は粒子を用いたラグランジュ的な手法であり、衝突破壊などの大変形問題の計算に有利である。しかしながら SPH 法には Tensile Instability という粒子同士がくっついてしまい元に戻らなくなる数値的な不安定性が存在する。一般に広く使われている標準 SPH 法では、固体が引き伸ばされた時に生じる固体素片同士の張力を表す負の圧力の状態において、この不安定性が特に顕著である。この不安定性は SPH 法の離散化誤差が原因であるが、標準 SPH 法は荒い近似を使用しているため空間 1 次精度すら達成できておらず、大きな誤差を含んでいる。一方でゴドノフ SPH 法という別の SPH 法では離散化を注意深く行い、空間 2 次精度を達成している。そこで本研究では高精度なゴドノフ SPH 法を用いれば Tensile Instability を自然に解決できると考え、線形安定性解析の手法を用いてゴドノフ SPH 法の安定性を評価した。その結果、ゴドノフ SPH 法の運動方程式に用いられている補間の種類を圧力の符号と空間の次元に応じて適切に選ぶことで、非物理的な項などを使うことなく自然に Tensile Instability を解決できることが分かった。

1 Introduction

固体惑星は天体衝突の繰り返しによる合体成長で形成されたと考えられている。従って惑星の起源を詳しく理解するにあたって、小天体同士の衝突による破壊及び合体の効果を詳細に理解することは極めて重要である。しかし小天体は km 以上のサイズを持つため、室内実験で衝突を再現することは不可能である。よって数値計算を用いて小天体の衝突破壊・合体の効果を評価する必要がある。

近年小天体の衝突計算が、Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法という流体の数値計算方法を弾性体力学に応用することで行われている (e.g., Benz & Asphaug 1999)。一般に広く使われている簡略な SPH 法は標準 SPH 法と呼ばれている。しかしこの標準 SPH 法には、固体が引き伸ばされた時に生じる固体素片同士の張力を表す負の圧力の状態において、Tensile Instability という粒子同士がくっついてしまう不安定性が存在する (Swegle et al. 1995)。Monaghan (2000) ではこの不安定性を人工圧力という粒子が近づいた時に反発力になる項を導入して解決したが、この解決方法は元の方程式にない非物理的な項を導入した不自然なものである。さらに Mehra et al. (2012) では、この人工圧力の項では高速衝突計算

における Tensile Instability を防ぐことができなかったと報告されている。従って天体の衝突計算を SPH 法で行うにあたって、より自然で堅牢な解決方法が必要である。

SPH 法における Tensile Instability の起源はその離散化誤差である。標準 SPH 法では離散化をする際に荒い近似を使用しているため、一般の粒子配置では空間 1 次精度すら達成できない。一方でゴドノフ SPH 法 (Inutsuka 2002) では離散化を注意深く行い、空間 2 次精度を達成している。よってこの高精度なゴドノフ SPH 法を用いれば Tensile Instability を自然に解決することが可能であると考えられる。本研究では線形安定性解析の手法を用いてゴドノフ SPH 法の安定性を評価し、自然で新しい Tensile Instability の解決方法を模索する。

2 ゴドノフ SPH 法

SPH 法ではスムージング長 h 程度の広がりを持った粒子を考え、その粒子の重ね合わせで流体のような連続体を表現する。任意の位置 x における密度は、

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_j m_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \quad (1)$$

と表現される。ただし、 $W(\mathbf{x}, h)$ はカーネル関数であり、ここではガウシアン型のものを使用する。粒子の加速度は流体力学のオイラーの運動方程式を離散化したもので与えられる。ゴドノフ SPH 法の運動方程式は、

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = -2 \sum_j m_j P_{ij}^* V_{ij}^2(h) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \sqrt{2}h) \quad (2)$$

与えられる。ただし、

$$V_{ij}^2(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{h\sqrt{\pi}} \frac{1}{\rho^2(s)} \exp\left(-\frac{2s^2}{h^2}\right) ds \quad (3)$$

であり、 s とは原点を i 粒子と j 粒子の midpoint に置き、 j 粒子から i 粒子の方向に軸をとった場合の軸上の位置である。また P_{ij}^* は実際には i 粒子と j 粒子の物理量を用いたリーマンソルバーを使用するが、ここでは簡単のため $P_{ij}^* = (P_i + P_j)/2$ とする。式 (3) は積分で与えられているので、実際には $1/\rho(s)$ を多項式近似して積分を解析的に実行する。多項式近似には線形補間、3 次スプライン補間、5 次スプライン補間の 3 種類が存在する。例えば線形補間は、

$$1/\rho(s) = C_{ij}s + D_{ij} \quad (4)$$

と補間することで、

$$V_{ij}^2(h) = \frac{1}{4} C_{ij}^2 h^2 + D_{ij}^2 \quad (5)$$

というように積分を実行できる。ただし、

$$C_{ij} = \frac{(1/\rho_i) - (1/\rho_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (6)$$

$$D_{ij} = \frac{(1/\rho_i) + (1/\rho_j)}{2}$$

である。本研究では状態方程式として、

$$P = C_s^2(\rho - \rho_{0,\text{eos}}) \quad (7)$$

という固体を模擬する単純なものを使用する。ただし C_s は音速、 $\rho_{0,\text{eos}}$ は物質の平均密度である。

3 線形安定性解析

本研究の線形安定性解析は、SPH 粒子を 1 辺 Δx の正方格子状に並べ、その位置に微小摂動を与えることを行った。無摂動状態での SPH 粒子の位置は、

$$\mathbf{r}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) = (l\Delta x, m\Delta x, n\Delta x) \quad (8)$$

と与えられる。ただし、 l, m, n は整数である。ここに x 方向に縦波の微小摂動を与える。摂動を与えた場合の粒子の位置は、

$$\mathbf{r}_i = (\bar{x}_i + \delta x_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$$

$$\delta x_i = \epsilon \exp[i(k\bar{x}_i - \omega t)] \quad (9)$$

と表される。ここで ϵ は微小量、添字でない i は虚数単位、 k と ω は摂動の波数と角周波数である。粒子の位置を決めることで、粒子の位置の密度は式 (1) から求めることができ、圧力も式 (7) から求められる。密度と圧力を微小量 ϵ に対し線形化し、運動方程式 (2) に代入することで分散関係を得ることができる。例えば線形補間の場合の分散関係は、

$$\omega_{\text{linear}}^2 = -C_s^2 D a + \frac{2DP_0}{\rho_0} a + \frac{2P_0}{\rho_0} b \quad (10)$$

となる。ただし、

$$D = \sum_j -\sin[k(\bar{x}_i - \bar{x}_j)] \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} W(\bar{x}_i - \bar{x}_j, h) \frac{m}{\rho_0}$$

$$a = \sum_{j \neq i} \sin[k(\bar{x}_i - \bar{x}_j)] \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} W(\bar{x}_i - \bar{x}_j, \sqrt{2}h) \frac{m}{\rho_0}$$

$$b = \sum_{j \neq i} (1 - \cos[k(\bar{x}_i - \bar{x}_j)]) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_i^2} W(\bar{x}_i - \bar{x}_j, \sqrt{2}h) \frac{m}{\rho_0} \quad (11)$$

であり、 ρ_0, P_0 は無摂動状態での密度、圧力である。3 次スプライン補間と 5 次スプライン補間についても、それぞれに用いられている運動方程式に対して線形解析を行うことで、同様の手法で分散関係を求めることができる。本研究では $\rho_{0,\text{eos}}$ のようなパラメータを自由に変えることで、 P_0 の値と符号を様々に変えて、それらの安定性を評価した。 $\omega^2 < 0$ にな

るような波数 k の摂動は不安定であり、そのような波数を持つ補間方法とパラメータでの計算は不安定であるということが言える。

それぞれの補間方法の分散関係式からスムージング長が $h = \Delta x$ の定数であれば、ゴドノフ SPH 法の安定性は補間方法、無摂動状態での圧力 P_0 の符号と空間の次元のみによることがわかった。図 1 はこれらの組み合わせによる安定性をまとめたものである。

	空間1次元 正の圧力	空間1次元 負の圧力	空間2,3次元 正の圧力	空間2,3次元 負の圧力
線形補間	○	×	○	×
3次スプライン 補間	○	×	×	○
5次スプライン 補間	×	○	×	○

図 1: 補間方法、圧力の符号と空間の次元の組み合わせにおける安定性の表。○ は安定なものを、× は不安定なものを表す。

図 1 から、どのような空間の次元と圧力の符号であっても、適切な補間方法を選べば安定に計算できるということがわかる。

4 テスト計算

4.1 流体のテスト計算:負の圧力での音波の伝搬

流体のゴドノフ SPH 法のテスト計算として、1次元、負の圧力における音波の伝搬を計算した。図 2 は 3 次スプライン補間で計算した場合の $t = 1.154972$ の時の密度分布、図 3 は 5 次スプライン補間で計算した場合の $t = 5.249869$ の時の密度分布である。

図 1 より、1次元で負の圧力の場合は 3 次スプライン補間は不安定であるが、5 次スプライン補間は安定であることが予想される。実際、図 2 を見ると 3 次スプライン補間の場合は短波長のゆらぎが成長してしまっていることがわかる。一方図 3 を見ると 5 次スプライン補間の場合は図 2 よりも 5 倍程度の時間が経っているにもかかわらず安定に計算できていることがわ

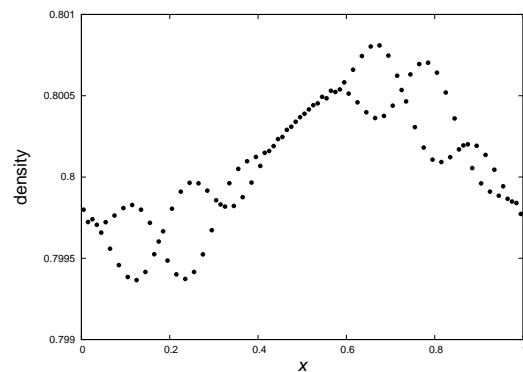


図 2: 負の圧力の音波を 3 次スプライン補間で計算した場合の $t = 1.154972$ における密度分布。

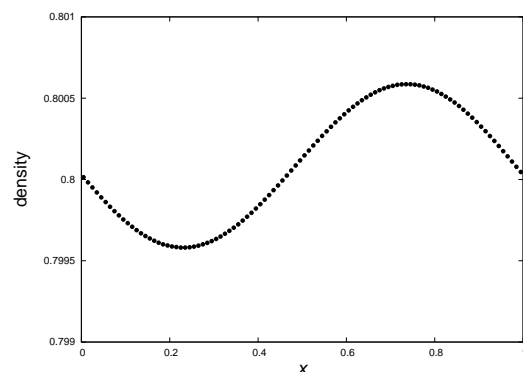


図 3: 負の圧力の音波を 5 次スプライン補間で計算した場合の $t = 5.249869$ における密度分布。

かる。このことから実際の計算においても線形安定性解析の結果が成り立つことが確かめられた。

4.2 弾性体のテスト計算:金属板の振動

本研究の方法が弾性体の計算にも有効であることを示すため、3次元における金属板の振動の数値計算を行う。弾性体力学は流体力学とは違い、横ずれの変形に対する力や非等方的な圧縮に対する力が存在する。弾性体力学でのゴドノフ SPH 法の運動方程式は、

$$\ddot{x}_i^\alpha = 2 \sum_j m_j \sigma_{ij}^{\alpha\beta,*} V_{ij}^2(h) \frac{\partial}{\partial x_i^\beta} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \sqrt{2}h) \quad (12)$$

となる。ただし $\sigma^{\alpha\beta}$ は応力テンソルであり、 $\sigma_{ij}^{\alpha\beta,*} = (\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta})/2$ である。応力テンソルは対角成分である圧力と非対角成分である偏差応力テンソルに分解でき、 $\sigma^{\alpha\beta} = -P\delta^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}$ というように表される。

3次元では正の圧力で線形補間が、負の圧力で3次スプライン補間が安定である。そのため引き伸ばされ負の圧力になっている場所で3次スプライン補間を、圧縮され正の圧力になっている場所で線形補間を使えば安定に計算できることが予想される。図4はこのような使い分けをして計算した場合の計算結果、図5は負の圧力でも線形補間をつかった場合の計算結果である。

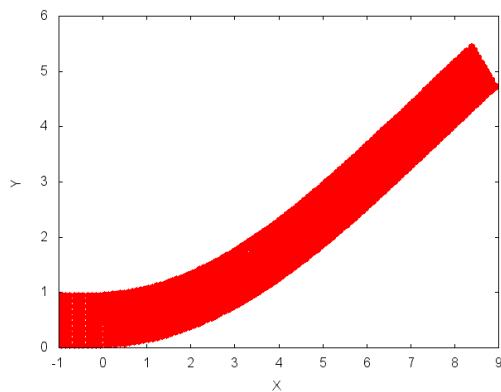


図 4: 金属板の振動の計算を圧力の符号に応じて補間方法を適切を選んで行った場合の計算結果。

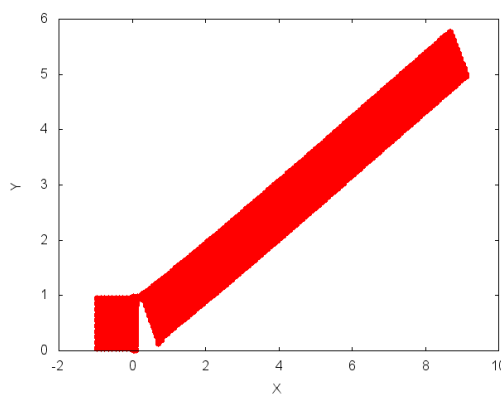


図 5: 金属板の振動の計算を圧力の符号によらず線形補間のみで行った場合の計算結果。

図 4 より適切に補間方法を選んだ場合は問題なく

計算できているが、図 5 より線形補間のみの場合は引き伸ばされた領域で非物理的な亀裂が入ることがわかる。注意したいのは、この計算には壊れるような効果は導入していないので、図 5 のような亀裂は不自然なものであるということである。この結果から、弾性体力学においても本研究の方法で安定に計算できることが示された。

5 Conclusion

本研究ではゴドノフ SPH 法を用いた Tensile Instability の自然で新しい解決法を、線形安定性解析の手法を用いて模索した。その結果圧力の符号と空間の次元に応じて運動方程式に用いられている補間の方法を適切に選ぶことで、非物理的な項を導入することなく自然に解決することができるということがわかった。またテスト計算を行った結果、弾性体においても同様の方法で安定に計算できることが示された。

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号: YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。また本研究を行うにあたって有用な議論をさせていただいた、犬塚修一郎氏、岩崎一成氏、塚本裕介氏に感謝いたします。

Reference

- W. Benz, & E. Asphaug 1999, Icarus 142, 5-20
- J. W. Swegle, D. L. Hicks & S. W. Attaway 1995, J. Comput. Phys. 116, 123-134
- J. J. Monaghan 2000, J. Comput. Phys. 159, 290-311
- V. Mehra, S. CD, V. Mishra & S. Chaturvedi 2012, Journal of Physics: Conference Series 377, 012102
- S. Inutsuka 2002, J. Comput. Phys. 179, 238-267