シフト対称性をもつスカラー・テンソル理論におけるブラックホール摂動

小川 潤 (立教大学大学院 理学研究科 M2)

Abstract

多くのスカラー・テンソル理論ではブラックホールの無毛定理が存在する。ところが、シフト対称性をもつスカラー・テンソル理論では、時間に依存したスカラー場の毛が生えるブラックホールが発見されている。このような解のブラックホール摂動の定式化が行われておらず、安定性が知られていなかった。本研究では、静的なスカラー場でのホルンデスキー理論におけるブラックホール摂動論を応用し、このようなブラックホールの安定性を判断する条件を導出する。

1 はじめに

一般相対論 (GR) は、これまで多くの観測的検証をパスしてきており、現在の重力の標準理論として支持されている。一方で、GR では説明できない現象も発見されつつある。近年、ブラックホール (BH) のような強重力場における修正重力理論 (MG) の研究に注目が高まっている (1)。

強重力場における重力理論の妥当性は、例えば重力波の観測によって決定できる。つまり、強重力場での重力理論を比較する上で、BH が重力波源として考えられるかを事前に検討する必要がある。これは、BH が摂動に対して安定かどうかで判定できる (2)。

MG としてホルンデスキー理論と呼ばれる、運動方程式が 2 階になる最も一般的な単一スカラー・テンソル理論が提唱されている (3)。この理論に含まれる関数自由度を選ぶことで、全ての単一スカラー・テンソル理論を包括的に記述できる。ホルンデスキー理論は、インフレーション宇宙論の文脈で小林らによって用いられ、再注目されている (4)。

ホルンデスキー理論における、静的なスカラー場の配位をもつ球対称 BH 解の安定性を判別する条件が得られている (5)(6)。しかし、スカラー場が静的な場合では、ほとんどの理論でスカラー場の配位が自明となってしまう (7)。つまり、BH 解が GR の場合と区別がつかなかった。

本研究の目的は、シフト対称性をもつスカラー・テンソル理論における BH の安定性を調べることである。スカラー場がシフト対称性をもち、さらに時間に線形的に依存するスカラー・テンソル理論において、非自明なスカラー場の配位をもつ球対称 BH 解が発見されている (8)。このスカラー場は BH の地平線で発散しないという著しい特徴を持っている。このような BH 解は、既存の BH 摂動の一般論が使えないため、安定性が不明であった。

2 章では、シフト対称性をもつスカラー・テンソル理論における、スカラー場が時間依存性をもつ場合の BH 解を紹介する。3 章では、ホルンデスキー理論における BH 摂動について述べ、BH の安定性の条件を導出する。4 章では、3 章で述べた方策を利用し、スカラー場が時間依存性をもつ場合の BH の安定性を議論するが、結果は本発表にて掲載する。

2 シフト対称性をもつスカラー・テンソル理論における BH 解

様々な MG で、BH を特徴付ける物理量について研究が進められている。GR において、BH を特徴付ける物理量は、質量・電荷・角運動量の 3 つしか無いという、BH の無毛定理が知られている。ほとんどの MG においても、BH の無毛定理が成立する (7)。しかし、あるスカラー・テンソル理論ではスカラー場の毛が生えることが発見された (8)。

シフト対称性をもつスカラー・テンソル理論として、次のようなラグランジアンを考える:

$$\mathscr{L} = [\zeta R - \eta(\partial\phi)^2 + \beta G^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - 2\Lambda] \tag{2.1}$$

ここで、$\zeta > 0, \eta, \beta$ は、任意の結合定数である。また、$\Lambda, G^{\mu\nu}, R$ はそれぞれ宇宙定数、アインシュタイ

ンテンソル、リッチスカラーである。この作用は、スカラー場に対してシフト対称性:

$$\phi \to \phi + \mathrm{const} \tag{2.2}$$

を持った作用である。この作用は、主に Galileon の一種として研究がなされている (9)。

2.1　重力場とスカラー場の運動方程式

(2.1) 式を計量について変分をとると、重力場の運動方程式が得られる:

$$\mathscr{E}_{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L})}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{2.3}$$

シフト対称性をもつスカラー・テンソル理論では、スカラー場の運動方程式はカレント保存の式で書ける:

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \quad J^\mu = (\eta g^{\mu\nu} - \beta G^{\mu\nu})\partial_\nu \phi. \tag{2.4}$$

以下では、背景時空の計量は静的球対称計量:

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \tag{2.5}$$

として、議論を進める。

2.2　地平線上での境界条件

スカラー場 ϕ の配位は次のような時間に線形依存すると仮定する:

$$\phi(t,r) = qt + \psi(r). \tag{2.6}$$

ただし、q は任意の定数、$\psi(r)$ はスカラー場を表す。BH の地平線上では、ネーターカレント ($J^2 = J_\mu J^\mu$) は発散しないと仮定する。これにより、

$$\eta g^{rr} - \beta G^{rr} = 0, \tag{2.7}$$

が要請される。これにより、地平線上で J^r が自動的に消去される (J^t は、地平線上で発散しないことが後で分かる)。多くのスカラー・テンソル理論では、地平線上で J^r がゼロという条件より、全領域で J^r がゼロとなることが知られている。つまり、スカラー場の分布は自明であることが大半であった (7)。しかし、今回のような高階微分項を含む理論では、非自明なスカラー場の解が許されることが判明した。

ところで、$q \neq 0$ のとき、J^t はゼロではない。そのため、ネーターカレントが地平線上で発散しないことを確かめる。(2.7) 式より、

$$f = \frac{(\beta + \eta r^2)h}{\beta (rh)'}, \tag{2.8}$$

を得る。ただし、$'$(ダッシュ) は r での微分を表す。ここで、J^t は (2.8) 式を (2.4) 式に代入すると、

$$J^t = \frac{(2\eta rh - 2\beta h' - r(\beta + \eta r^2)h'')q}{r(rh)'^2}, \tag{2.9}$$

と表せる。つまり、$(rh)'$ がゼロでなければ、地平線上 ($h(r) = 0$) で J^t とネーターカレント ($J^2 = g_{tt}J^t J^t = 0$) は、発散しない。

また、計量やスカラー場の発散については、座標での見かけ上の発散の可能性があるため Eddington-Finkelstein 座標:

$$v = t + \int (fh)^{-1/2} dr, \tag{2.10}$$

で判断する。これにより、計量は

$$ds^2 = -hdv^2 + 2\sqrt{h/f}dvdr + r^2 d\Omega^2 \tag{2.11}$$

となり、地平線上では発散しない。

2.3　スカラー場の解

スカラー場の配位 ((2.6) 式) と (2.8) 式を、重力場の運動方程式 $\mathscr{E}_{rr}$ に代入すると

$$\psi'(r) = \pm \frac{\sqrt{r}}{h(\beta + \eta r^2)} \left(q^2 \beta (\beta + \eta r^2) h' - \frac{\lambda}{2}(h^2 r^2)' \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.12}$$

を得る。ただし、$\lambda := \zeta\eta + \beta\Lambda$ である。最後に、(2.8) 式と (2.12) 式を $\mathscr{E}_{tt}$ に代入すると、$h(r)$ の非線形微分方程式が得られる。これを解くと、

$$h(r) = -\frac{\mu}{r} + \frac{1}{r}\int \frac{k(r)}{\beta + \eta r^2} dr \tag{2.13}$$

を得る。μ は積分定数で、$k(r)$ は次の方程式を満たす:

$$q^2\beta(\beta + \eta r^2)^2 - (2\zeta\beta + (2\zeta\eta - \lambda)r^2)k + C_0 k^{3/2} = 0. \tag{2.14}$$

ただし、C_0 は積分定数である。$h(r)$((2.13) 式) を決めることで、$\psi(r)$((2.12) 式) と $f(r)$((2.8) 式) が決まる。(8) では、BH 解として次のような解が例として挙げられている。

Stealth Schwarzschild BH

$\Lambda = \eta = 0$ とすると、k は r に依存しないようなゲージを選べる。ここで、$k=\beta$ とすると、$f(r)$ と $h(r)$ は (2.8) 式と (2.13) 式より

$$f = h = 1 - \frac{\mu}{r}, \tag{2.15}$$

と、Schwarzschild 計量となる。しかしながら、非自明なスカラー場が BH の周りに次のように配位している:

$$\phi_{\pm} = qt \pm q\mu \left[2\sqrt{\frac{r}{\mu}} + \log \frac{\sqrt{r}-\sqrt{\mu}}{\sqrt{r}+\sqrt{\mu}} \right] + \phi_0. \tag{2.16}$$

ここで、スカラー場の正符号が、future horizon で発散しないことが確かめられる。より詳しくは、(2.10) 式より

$$\phi_{+} = q \left[v - r + 2\sqrt{\mu r} - 2\mu \log \left(\sqrt{\frac{r}{\mu}} + 1 \right) \right], \tag{2.17}$$

となる。明らかに、地平線上 ($r=\mu$) で発散しない。

この BH 解は、摂動しなければ GR の解である Schwarzschild 解と区別が不可能である。しかしながら、このような解が摂動に対して安定かどうかに関しては研究がなされていなかった。

3 BH 摂動

BH の安定性は、摂動のしたがう運動方程式が安定かどうかによって判断できる。静的なスカラー場でのホルンデスキー理論における、BH の安定性は小林らによって確かめられている (5)(6)。ホルンデスキー理論とは、運動方程式が 2 階となる全ての単一スカラー・テンソル理論を包括する理論で次のような作用をもつ (3):

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{h}} = {} & G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\Box\phi \\ & + G_4(\phi, X)R + G_{4X}[(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2] \\ & + G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - \frac{1}{6}G_{5X}[(\Box\phi)^3 \\ & - 3(\Box\phi)(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3].\end{aligned} \tag{3.1}$$

ただし、$X = -(\partial\phi)^2/2, G_{iX} := \partial G_i/\partial X$ である。この理論に含まれる関数自由度 G_2, G_3, G_4, G_5 を特定の形に選ぶことで、GR や特定のスカラー・テンソル理論に帰着させることができる。作用には 2 階微分項が含まれているが、運動方程式を導出した際は 3 階微分項が現れず 2 階となる。本章では、ホルンデスキー理論における odd-parity における BH 摂動について述べる (5)。

3.1 作用を摂動の二次で展開する

GR における BH の安定性は Regge と Wheeler によって、Regge-Wheeler 方程式を導出することで確かめられている (2)。しかしながら、摂動がしたがう運動方程式からでは、ゴースト不安定性が言及できないため摂動の安定性を完全には判断できない。そのため、Regge-Wheeler 方程式となる作用を特定する必要がある。

まず、球対称計量 (2.5) 式に摂動 $h_{\mu\nu}$ を与える:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \tag{3.2}$$

摂動の自由度は、Regge-Wheeler ゲージを採用する:

$$\begin{aligned} & h_{tt} = 0, \quad h_{tr} = 0, \quad h_{rr} = 0, \quad h_{ab} = 0, \\ & h_{ta} = \sum_{l,m} h_{0,lm}(t,r) E_{ab}\partial^b Y_{lm}(\theta,\phi), \\ & h_{ra} = \sum_{l,m} h_{1,lm}(t,r) E_{ab}\partial^b Y_{lm}(\theta,\phi). \end{aligned} \tag{3.3}$$

ただし、γ_{ab} と ϵ_{ab} をそれぞれ二次元球面の計量、レビ・チビタ記号とし、$E_{ab} := \sqrt{\det\gamma}\epsilon_{ab}$ と定義した。

次に、このゲージ条件を課して、作用を摂動の二次で展開すると次のようになる (変数 Q の定義は (5) を参照、Q を解くことで自動的に h_0 と h_1 が決まる):

$$\begin{aligned}\frac{2l+1}{2\pi}\mathscr{L}_h^{(2)} = {} & \frac{l(l+1)}{2(l-1)(l+2)} \\ & \times \left[\frac{\mathscr{F}}{fh\mathscr{G}}\dot{Q}^2 - Q'^2 - \frac{l(l+1)\mathscr{F}}{r^2 f\mathscr{H}} - V(r)Q^2 \right].\end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで、$l \geqq 2$ であり、$V(r)$ はポテンシャルを表している (詳しい表示は (5) を参照)。また、

$$\mathscr{F} = 2\left(G_4 + \frac{1}{2}f\phi' X' G_{5X} - XG_{5\phi}\right) \tag{3.5}$$

$$\mathscr{G} = 2\left[G_4 - 2XG_{4X} + X\left(\frac{h'}{2h}B\phi' G_{5X} + G_{5\phi})\right)\right] \tag{3.6}$$

$$\mathscr{H} = 2\left[G_4 - 2XG_{4X} + X\left(\frac{f\phi'}{r}G_{5X} + G_{5\phi}\right)\right] \tag{3.7}$$

である。

最後に、(3.4) 式を Q について変分を取ると摂動のしたがう運動方程式が得られる。これより動径方向と角度方向の音速が分かる。これらをそれぞれ c_r^2,c_θ^2 とすると、次のような値になる:

$$c_r^2 = \frac{\mathscr{G}}{\mathscr{F}}, \quad c_\theta^2 = \frac{\mathscr{G}}{\mathscr{H}}. \tag{3.8}$$

摂動の二次まで展開したラグランジアン (3.4) 式の運動項の正値性と、摂動の動径方向と角度方向の音速 (3.8) 式より、odd-parity mode の摂動に対して BH が安定である条件は次を満たすことが必要となる:

$$\mathscr{F} > 0, \quad \mathscr{G} > 0, \quad \mathscr{H} > 0. \tag{3.9}$$

even-parity mode でも同様の解析が行われており、スカラー場が静的な場合のホルンデスキー理論が含む全ての単一スカラー・テンソル理論における BH の安定性が判断できる (6)。

4 シフト対称性をもつスカラー・テンソル理論での BH の安定性

本研究では、3 章で述べた方策を 2 章で述べた理論に応用し、シフト対称性をもつスカラー・テンソル理論における BH の安定性を判断する条件を求めることを目的としている。2 章で述べた作用は、ホルンデスキー理論のサブクラスに含まれている (10):

$$\mathscr{L} = G_2(X) + G_4(X)R + G_{4X}\left[(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\right]. \tag{4.1}$$

(8) のラグランジアン (2.1) 式を再現するには、

$$G_2 = -2\Lambda + 2\eta X, \quad G_4 = \zeta + \beta X \tag{4.2}$$

と選べば良い。このとき、スカラー場は (2.6) 式のように時間に線形に依存したものとする。3 章で述べた方策を利用し、(4.1) 式に含まれる BH の安定性を調べる。現在、odd-parity mode の摂動について解析を行っており、作用を摂動の二次で展開しており、安定性を判断する条件が得られる段階にある。これらは、本発表にて紹介する。

謝辞

天文天体物理若手夏の学校にご賛同頂き、ご支援下さった皆様に感謝致しております。この場を借りて厚く御礼申し上げます。

Reference

[1] E.Berti, et.al, (2015), [arXiv:1501.07274 [gr-qc]],

[2] T. Regge, J. A. Wheeler, Phys. Rev. **108** (1957), 1063.

[3] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10** (1974), 363-384.

[4] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, Prog. Theor. Phys. **126** (2011), 511-529, [arXiv:1105.5723 [hep-th]].

[5] T. Kobayashi, H. Motohashi and T. Suyama, Phys. Rev. **D85** (2012), 084025, [arXiv:1202.4893 [gr-qc]].

[6] T. Kobayashi, H. Motohashi and T. Suyama, Phys. Rev. **D89** (2014), 084042, [arXiv:1402.6740 [gr-qc]].

[7] L. Hui, A. Nicolis, Phys. Rev. Lett. **110** (2013), 241104,[arXiv:1202.1296 [hep-th]].

[8] E. Babichev, C. Charmousis, JHEP **1408**(2014), 106, [arXiv:1312.3204 [gr-qc]].

[9] C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer and G. Zahariade, Phys. Rev. **D84** (2011), 064039, [arXiv:1103.3260 [hep-th]].

[10] T. Kobayashi, N. Tanahashi, Prog. Theor. Exp.Phys. PTEP **2014** (2014), 7, 073E02, [arXiv:1403.4364 [gr-qc]].