

## Blandford-Znajek 機構の起電力について

赤井 祐美 (大阪市立大学大学院 素粒子論研究室)

### Abstract

活動銀河中心での相対論的なジェットや  $\gamma$  線バーストを説明するメカニズムの 1 つとして、Blandford-Znajek(B-Z) 機構がある。これは Black hole(BH) の回転エネルギーを磁場によって引き抜く機構である。しかしこの起電力の起源は議論されている。

Kenji Toma と Fumio Takahara の論文 [1] では、B-Z 機構をプラズマで満たされた Kerr BH 磁気圏内の単極誘導と理解した。またその起電力の起源はエルゴ領域にて電場が磁場に対して卓越することであることを明らかにした。本公演では論文 [1] のレビューを行う。

## 1 Introduction

$\gamma$  線バースト等、宇宙にはさまざま高エネルギー天体現象がある。その駆動メカニズムは不明であるが、BH が関係していると考えられている。BH の回転エネルギーを引き抜くメカニズムとして、Penrose process、Super radiud、B-Z 機構等があるが、前者 2 つは起こりにく現象と考えられている。

B-Z 機構とは Blandford と Znajek が 1977 年に提唱した方法である。Goldreich と Julian が 1969 年に示した、パルサーの回転エネルギーを磁場によって引き抜く機構を Kerr BH に拡張したものである。Blandford と Znajek は導く際に Force-free を仮定し、また磁力線は BH の Event horizon から生えているものとした。BH の角速度  $\Omega_H$  が磁力線の角速度  $\Omega_F$  よりも大きい場合にエネルギーが引き抜けることを示したが、Event horizon からエネルギーが出てくるという、一見不自然に思われる結果である。

Toma と Takahara は Force-free 近似を用いず、また磁力線はエルゴ領域に生えているものとして、より一般的に議論した。また、起電力の起源はエルゴ領域にあることも示した。

## 2 パルサーの起電力

Kerr BH の前に Goldreich と Julian が発見した、パルサーでの起電力をレビューする。角速度  $\Omega_s$  で回転している、一様に磁化された星を考

える。次の 3 つを仮定する。

1. 回転ベクトルは磁気双極子モーメントと並行である、つまり系は定常で軸対称である。
2. 星表面上と内で、物質は非常に伝導性があり、物質の回転エネルギーが支配的となっている。
3. 星の外側はプラズマで満たされている。プラズマは希薄で衝突しないが、数密度は  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$  を満たすほど十分大きい。

粒子のエネルギー密度は電磁場のそれより非常に小さい。電磁場は中心の星の重力がローレンツ力と比べて無視できるほど十分強い。ここでは  $c = 1$  の単位系を用いる。また円柱座標  $(\varpi, \varphi, z)$  を用いる。

仮定 2 より、星内部の電場は

$$\mathbf{E} = -\varpi \Omega_s \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{B} \quad (1)$$

となる。

星の外側では、定常状態での Faraday の法則から  $\nabla \times \mathbf{E} = 0 (E_\varphi = 0)$ 。これと  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$  より電場は次のように書ける。

$$\mathbf{E} = -\varpi \Omega_F \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{B} \quad (2)$$

ここで  $\Omega_F$  は磁力線の角速度であり、各  $\mathbf{B}$  に沿って const であることはすぐ分かる。(2) 式は、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$  の領域がない限り、星内部も含めて全領域で満たされなくてはならない。

$$\Omega_F = \Omega_s \quad (3)$$

これは星の回転が起電力の起源であることを意味している。

磁気圏での粒子は  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトをする。ドリフト速度は (2) を用いて次のようになる。

$$\mathbf{v}_d = \varpi \Omega_F \mathbf{e}_\varphi - \varpi \Omega_F \frac{B_\varphi}{B^2} \mathbf{B} \quad (4)$$

また磁気圏での電荷密度が計算でき、

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{-\Omega_s B_z}{2\pi(1 - \varpi^2 \Omega_s^2)} \approx \frac{-\Omega_s B_z}{2\pi} \quad (5)$$

となる。これは  $B_z > 0 (< 0)$  の領域では  $\rho < 0 (> 0)$  であることを意味している。

光円柱  $\varpi = \varpi_{lc} \equiv 1/\Omega_F$  の外側において光速を超えないために、(4) において  $B_\varphi$  が必ず必要となる。この  $B_\varphi$  は物質が支配する星からのポロイダル電流から生じなくてははいけない。また赤道面に対称ということから、これらの磁力線は開いていなければならない。よって北(南)半球で  $B_\varphi < 0 (> 0)$ 。

星の内部を流れる電流からポインティング・フラックスのポロイダル成分  $\mathbf{S}_p = \mathbf{E} \times \mathbf{B}_\varphi / 4\pi = -\Omega_F \varpi B_\varphi \mathbf{B}_p / 4\pi$  が生成され、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S}_p &= -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_p = (\varpi \Omega_F \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{B}_p) \cdot \mathbf{J}_p \\ &= -(\mathbf{J}_p \times \mathbf{B}_p) \cdot \varpi \Omega_F \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (6)$$

これより、 $-\mathbf{e}_\varphi$  方向のローレンツ力  $\mathbf{J}_p \times \mathbf{B}_p$  がポインティング・フラックス生成のフィードバックとして星の回転を遅くしていることがわかる。つまり、回転している星は起電力を生成しつつ、またポロイダル電流を得続け、外に向かうポインティング・フラックスを生成し続ける。

### 3 3+1 電気分解

$c = 1, GM = 1$  (M は BH の質量) の単位系、また球座標  $(t, \varphi, r, \theta)$  を用いる。Boyer-Lindquist(BL) 座標を使う。

$\alpha$ : lapse 関数、 $\beta^i$ : shift ベクトル、 $\gamma_{ij}$ : 空間的超曲面の 3 次元計量テンソルとする。

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(\beta^i dt + dx^i)(\beta^j dt + dx^j) \quad (7)$$

Kerr 時空においては  $\partial_t g_{\mu\nu} = \partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0$  なので、キリングベクトル  $\xi^\mu$  と  $\chi^\mu$  が存在する。 $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ 、 $\chi^\mu = (0, 1, 0, 0)$ 。

世界線が超曲面に垂直である、local fiducial observer(FIDO) は 4 元速度

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{-\beta^i}{\alpha}\right), \quad n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0) \quad (8)$$

を用いて記述される。

FIDO は次の座標角速度を持って回転する。

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi_{FIDO}}{dt} = -\beta^\varphi > 0 \quad (9)$$

これは BH と同じ方向である。event horizon で  $g_{rr} = \infty$  の特異点をもつ。エルゴ領域では  $\xi^2 = g_{tt} = -\alpha^2 + \beta^2 > 0$  なので  $\xi^\mu$  は空間的である。

共役 Maxwell 方程式  $\nabla_\nu {}^*F^{\mu\nu} = 0$ 、 $\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi I^\mu$  から次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi \rho, & -\partial_t \mathbf{D} + \nabla \times \mathbf{H} &= 4\pi \mathbf{J} \end{aligned} \quad (10)$$

$\nabla \cdot \mathbf{C} = (1/\sqrt{\gamma})\partial_i(\sqrt{\gamma}C^i)$ 、 $\nabla \times \mathbf{C} = e^{ijk}\partial_j C_k$ 、ここで  $e^{ijk} = (1/\sqrt{\gamma})\epsilon^{ijk}$  は超曲面上の Levi-Civita 擬テンソルである。また、

$$\mathbf{E} = \alpha \mathbf{D} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \alpha \mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D} \quad (11)$$

$\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\rho$  はそれぞれ FIDO が測定した、電場、磁場、電荷密度である。電流  $\mathbf{J}$  と FIDO によって測られた電流  $\mathbf{j}$  との関係は  $\mathbf{J} = \alpha \mathbf{j} - \rho \boldsymbol{\beta}$  となっている。

電磁場の共役エネルギー運動量の式  $\nabla_\nu T_\mu^\nu = -4\pi F_{\mu\nu} I^\nu$  から、定常、軸対称を用いて、次の角運動量の式とエネルギーの式が得られる。

$$B^i \partial_i \left(-\frac{H_\varphi}{4\pi}\right) = -(\mathbf{J}_p \times \mathbf{B}_p) \cdot \mathbf{m} \quad (12)$$

$$B^i \partial_i \left(-\Omega_F \frac{H_\varphi}{4\pi}\right) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_p \quad (13)$$

### 4 B-Z 機構の起電力

Kerr BH の起電力を次の仮定をもとに考える。

1. 外部の電流によって生成されたポロイダル磁場は磁気圏を貫いている。

2. 磁気圏でのプラズマは希薄で衝突しないが、数密度は  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} = 0$  を満たすほど十分大きい。粒子のエネルギー密度は電磁場のエネルギー密度よりはるかに小さい。
3. 重力はローレンツ力に比べて無視できる。(event horizon では別)。

これらの仮定はパルサーの場合と同じだが、1つの大きな違いは物質が支配する領域がないことである。

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ 、 $E_\varphi = 0$  を考慮すると、

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}, \quad \boldsymbol{\omega} = \Omega_F \mathbf{m} \quad (14)$$

$\Omega_F$  は磁力線に沿って constant である。

定常、軸対称状態での角運動量方程式 (12)、(13) からポインティングフラックスの湧き出し、もしくは吸収を得るためには  $\mathbf{J}_p \times \mathbf{B}_p \neq 0$ 、 $\Omega_F \neq 0$  が必要となることがわかる。 $D^2 > B^2$  の領域において  $\mathbf{J}_p \times \mathbf{B}_p \neq 0$  が成立することを、電磁場中での粒子の運動を調べることによって示す。

FIDO が観測する粒子運動の方程式

$$\frac{d\hat{u}_i}{dt} = \frac{q}{m} (\hat{D}_i + \epsilon_{ijk} \hat{v}^j \hat{B}^k) \quad (15)$$

粒子の  $\mathbf{u}$ : 4元速度。  $\mathbf{v}$ : 3元速度。  $q$ : 電荷。  $m$  質量。  $\hat{C}_i$ : FIDO の正規直交でのベクトル成分。

$D^2 < B^2$  ( $\hat{D}^2 < \hat{B}^2$ ) のとき、 $\hat{\mathbf{D}} \times \hat{\mathbf{B}}$  ドリフトする。結果として荷電粒子の運動は  $\mathbf{J}_p \cdot \mathbf{D} = 0$ 、 $\mathbf{J}_p \parallel \mathbf{B}_p$  を満たす電流のみ運ぶことができる。

$D^2 > B^2$  ( $\hat{D}^2 > \hat{B}^2$ ) のとき、正 (負) 荷電粒子は  $\hat{\mathbf{D}}$  ( $-\hat{\mathbf{D}}$ ) の方へ動かされる。  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{D} \neq 0$ 、 $\mathbf{J}_p \not\parallel \mathbf{B}_p$ 。  $E_\varphi = 0$  なので、force-free 近似  $F_{\mu\nu} I^\nu = 0$  ( $\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$ ) だとこの場合敗れている。

よって  $D^2 > B^2$  の領域において  $\mathbf{J}_p \times \mathbf{B}_p \neq 0$  が成立する。

次に Kerr BH の磁気圏内での起電力を議論するための式を導く。ここで、エルゴ領域を貫いているポロイダル  $\mathbf{B}$  field line は開いている。つまり outer light surface を横切っている。

light surface は座標角速度  $\Omega_F$  で回転している粒子の 4 元速度がヌルになる、すなわち  $f(\Omega_F, r, \theta) = 0$  となる表面のことである。ここで  $f$  は次のように定

義している。

$$f(\Omega_F, r, \theta) \equiv (\xi + \Omega_F \chi)^2 = -\alpha^2 + \gamma_{\varphi\varphi} (\Omega_F - \Omega)^2 \quad (16)$$

2つの light surface がある。1つは outer light surface で、そこでは  $\Omega_F - \Omega = \alpha / \sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}$  ( $\Omega < \Omega_F$ ) を満たす。もう1つは inner light surface で  $\Omega_F - \Omega = -\alpha / \sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}$  ( $\Omega > \Omega_F$ ) を満たす。

$\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} = 0$  と、 $\mathbf{E} = \alpha \mathbf{D} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}$ 、 $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}$  ( $\boldsymbol{\omega} = \Omega_F \mathbf{m}$ ) を用いると次が導ける。

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{\alpha} (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{B} \quad (17)$$

これより

$$D^2 = \frac{1}{\alpha^2} (\Omega_F - \Omega)^2 B_p^2 \gamma_{\varphi\varphi} \quad (18)$$

ここで  $B_p^2 \equiv B^r B_r + B^\theta B_\theta$ 。 (18) 式を用いるとこの方程式は次のように描きなおされる。

$$(B^2 - D^2) \alpha^2 = -B^2 f(\Omega_F, r, \theta) + \frac{1}{\alpha^2} (\Omega_F - \Omega)^2 H_\varphi^2 \quad (19)$$

ここで  $H_\varphi = \alpha B_\varphi$ 。

今から起電力の起源がエルゴ領域であることを見ていく。初めに、エルゴ領域を貫く  $\mathbf{B}$  field line において  $\Omega_F = 0$ 、 $H_\varphi = 0$  をもつ定常、軸対称状態が存在しないことを示す。(23) 式は次のようになる。

$$(B^2 - D^2) \alpha^2 = B^2 (\alpha^2 - \beta^2) \quad (20)$$

エルゴ領域では  $\alpha^2 - \beta^2 < 0$  なので  $D^2 > B^2$  である。(17) より  $H_\varphi$  が生成されてしまう。ポロイダル電流は  $\mathbf{D}$  の強さを弱める。よって (20) 式から  $\Omega_F > 0$ 、つまり  $\mathbf{E}$  が non-zero であることを意味する。よって  $\Omega_F = 0$ 、 $H_\varphi = 0$  をもつ定常、軸対称状態が存在しない。またこの議論から起電力の起源がエルゴ領域によって生じたものとみなせる。

$D^2 > B^2$  で  $\mathbf{J}_p \times \mathbf{B}_p \neq 0$  の領域のことを、"current crossing region" と呼ぶことにする。 $\Omega_F > 0$ 、 $H_\varphi \neq 0$  (open  $\mathbf{B}$  field line) の時、current crossing region はエルゴ領域のどこだろうか。エルゴ領域内の赤道面を貫く開いた  $\mathbf{B}$  field line に注目する。(図 2)

まず、 $\Omega_F > 0$  なのでそれぞれの field line において  $\Omega = \Omega_F$  となる点がある。この点より下 (上) で

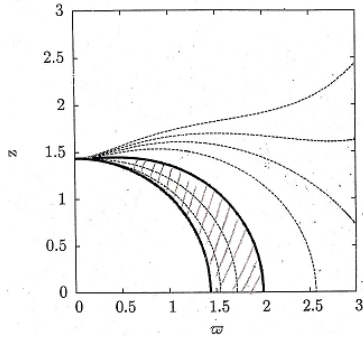


図 1: Inner thick line: event horizon. Outer thick line: the outer boundary of the ergosphere.  $a=0.9$ . The thin line represent  $\Omega - \alpha/\sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}} = 0.2, 0.1, -0.1, -0.14, -0.17, -0.2$  in the order of increasing  $r$ .

は、 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} < 0 (> 0)$  になる。 $\Omega = \Omega_F$  は outer light surface と inner light surface の間にある。図 1 より、 $\Omega - \alpha/\sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}$  が正なのはエルゴ領域内のみなので、 $\Omega_F > 0$  は inner light surface がエルゴ領域に位置していることを要求する。

対称性より、赤道面で  $H_\varphi = 0$ 。current crossing region は赤道面も含まなくてはいけない。(19) 式から赤道面付近の  $H_\varphi$  が十分小さい領域では  $f(\Omega_F, r, \theta) > 0$  なので  $D^2 > B^2$  が満たされていることがわかる。したがって、current crossing region はエルゴ領域内にある、inner light surface の下に必ず存在する。current crossing region の上では  $D^2 < B^2$  が満たされており、 $H_\varphi \sim const$  である。

current crossing region 内では、 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} < 0$  なので、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_p < 0$ 。これは外向きのポインティングフラックスを生成する。

current crossing region が無限に薄い極限を考える。すると赤道面上で  $D^2 \approx B^2$  となり、(19) より  $f(\Omega_F, r, \theta) \approx 0$ 。このとき  $\Omega_F$  の最大値 ( $= \Omega_{F,max}$ ) を与える

$$0 < \Omega_F < \Omega_{F,max} \equiv \left( \Omega - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}} \right) \Big|_{z=0} \quad (21)$$

この範囲内で inner light surface がエルゴ領域内に存在し、current crossing region が存在できる。

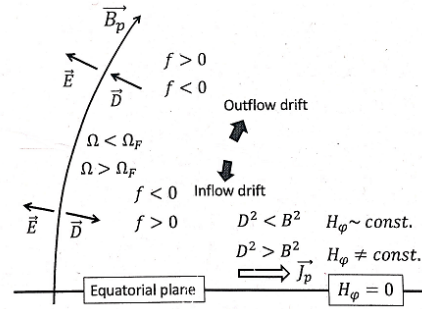


図 2: Electromagnetic structure in the northern hemisphere along a  $\mathbf{B}$  field line threading the equatorial plane in the ergosphere.

## 5 結論

今まで B-Z 機構を Kerr BH の磁気圏内の定常な単極誘導として扱ってきた。磁気圏はプラズマにより  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} = 0$  であり、エネルギー密度は電磁場が支配的であった。この機構での起電力の起源はエルゴ領域である。これは星の回転が起電力の起源であったパルサーの場合とは異なった。エルゴ領域を貫くすべての  $\mathbf{B}$  field line は、必ず  $D^2 > B^2$  を持ち続ける。これによってポロイダル  $\mathbf{B}$  field line を横切るポロイダル電流を発生させ ( $H_\varphi \neq 0$ )、起電力、つまり  $\Omega_F > 0$  を生み出した。current crossing region 下では、電流は  $-\mathbf{E}$  の方向に流れ、外向きのポロイダルポインティングフラックスを生成した。これはパルサーとよく似ている。current crossing region での状態  $\mathbf{J}_p \times \mathbf{B}_p \neq 0$  は force-free 近似が想定できなかったことを意味していた。この議論では  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} = 0$  のみを仮定しており、force-free 条件  $\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$  を利用していない。

## Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号: YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。

## Reference

- [1] K. Toma, & F. Takahara 2014, Mon. Not. R. Astron. Soc. 442, 2855