

パルサータイミングによる背景重力波の検出理論

加藤 亮 (神戸大学大学院 理学研究科)

Abstract

重力波の直接検出は Pulsar Timing Array (PTA) の第一目標である。PTA が現在対象とする重力波は、supermassive black holes (SMBHs) の連星から放出される重力波であり、SMBHs は宇宙に普遍的に存在すると考えられているので背景重力波に分類される。一般的に、背景重力波によるパルス周期のズレは予想されるノイズと比べて非常に小さく、直接検出は不可能のように思われる。しかし、異なるパルサー間の観測データの相関を取ることで、ノイズに埋もれた背景重力波のシグナルを抜き出せることが知られている。また、PTA の感度は太陽系重心-パルサーのペアのなす角に依存し、overlap reduction function によって記述される。

本発表では、等方的で無偏光な背景重力波に対して予言される Hellings and Downs curve までの検出理論をレビューする。

1 イントロダクション

重力波の直接検出が期待される観測の一つに PTA が挙げられる。これは、周期の安定したミリ秒パルサーを複数観測し、観測データの相関をとるものである。PTA が感度をもつバンド幅は $10^{-9} - 10^{-7}$ Hz であり、この領域で観測の見込みのある重力波源は、SMBHs の連星系の質量が $10^7 - 10^9 M_{\odot}$ の間にあるものとされている。SMBH は銀河の中心に存在し、同時に Λ -CDM モデルにより銀河の合体が予想される。よって宇宙には普遍的に SMBHs の連星があると考えられ、これらが放出する重力波の重ね合わせが、統計的に扱うことが可能な背景重力波となる。

背景重力波を直接検出するためのアプローチとして、観測データの相関をとるという手法が広く用いられている。これは、背景重力波は統計的に扱われるからであり、統計的性質は次の四つが仮定される。

定常性・ガウス性・等方性・無偏光

また、予想されるノイズも簡単のため、定常性とガウス性が仮定される。本発表では、この仮定のもとで、観測データから重力波のシグナルを見つけ出す方法をレビューする。また、観測データの相関をとることで現れる幾何学的な関数 overlap reduction function の性質についてもレビューする。

2 検出理論

2.1 重力波のシグナル

まず、重力波の平面波展開の式は

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \sum_{A=+, \times} \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{S^2} d\hat{\Omega} \times h_A(f, \hat{\Omega}) e_{ij}^A(\hat{\Omega}) e^{-2\pi i f(t - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{x}/c)} \quad (1)$$

と与えられる。ここで、 f は重力波の振動数、 $\hat{\Omega}$ は重力波の進行方向の単位ベクトル、 $e_{ij}^A(\hat{\Omega})$ は偏光テンソルである。

宇宙基準系で太陽系重心とパルサーが静止していると仮定する。パルサーから太陽系重心へのパルスは、重力波の影響を考慮すると到着時間が変わるので、赤方偏移 z は次のように与えられる。

$$z(t, \hat{\Omega}) = \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^i \hat{p}^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}} \Delta h_{ij} \quad (2)$$

ここで、

$$\Delta h_{ij} \equiv h_{ij}(t_p, \hat{\Omega}) - h_{ij}(t_e, \hat{\Omega}) \quad (3)$$

となる。ただし、 \hat{p} はパルサー方向の単位ベクトル、 $h_{ij}(t_p), h_{ij}(t_e)$ はそれぞれパルサー、太陽系重心における重力波である。今後、この赤方偏移を重力波のシグナルと呼ぶ。

2.2 観測データの相関

二つのパルサーの観測データ $s(t)$ は

$$s_1(t) = z_1(t) + n_1(t) \quad (4)$$

$$s_2(t) = z_2(t) + n_2(t) \quad (5)$$

と書ける。ここで、 $z(t)$ は重力波のシグナル、 $n(t)$ はノイズである。

背景重力波とノイズの統計的性質として、定常性、ガウス性を仮定し、ノイズの相関が無いとする。背景重力波の統計的性質はシグナルの統計的性質そのものであり、背景重力波の相関はあるので、この意味でシグナルとノイズが区別できることになる。この仮定は、シグナルとノイズの平均がゼロとすると、次のように表される。

$$\begin{aligned} \langle n_i(t) \rangle &= 0 \\ \langle z_i(t) \rangle &= 0 \\ \langle n_1(t)n_2(t) \rangle &= 0 \\ \langle n_i(t)z_j(t) \rangle &= 0 \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均である。また、シグナルがノイズより十分小さい

$$z(t) \ll n(t) \quad (7)$$

とし、さらに次の量を定義する。

$$\langle S \rangle \equiv \langle s_1(t)s_2(t) \rangle \quad (8)$$

これは、ほとんど同一方向のパルサーを用いた場合の相関である。

式 (6),(7),(8) を用いると、次のように定義される量が

$$\begin{aligned} \mu &\equiv \langle S \rangle \\ &= \langle z_1(t)z_2(t) \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\equiv \langle S^2 \rangle + \langle S \rangle^2 \\ &\approx \langle n_1(t)n_1(t) \rangle \langle n_2(t)n_2(t) \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

となる。このようにして、統計的性質が同じで原理的に区別できないシグナルとノイズを、シグナルだけに依存する量と、近似的にノイズだけに依存する量にすることができた。

2.3 overlap reduction function

太陽系重心とパルサーの座標を

$$t_p = t_e - L \equiv t - L \quad (11)$$

$$\vec{x}_e = 0 \quad (12)$$

$$\vec{x}_p = L\hat{p} \quad (13)$$

とし、太陽系重心とパルサーでの重力波の振幅が同じだとする。また、背景重力波の統計的性質として、

定常性・ガウス性・等方性・無偏光

を仮定すると、フーリエ振幅のアンサンブル平均は

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{h}_A^*(f, \hat{\Omega}), \tilde{h}_{A'}(f', \hat{\Omega}') \rangle \\ &= \delta(f - f') \frac{\delta^2(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}')}{4\pi} \delta_{AA'} \frac{1}{2} S_h(f) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ここで、 $S_h(f)$ はパワースペクトル密度である。このとき、式 (1),(2) を用いると、 $\langle z_1(f)z_2(f) \rangle$ の中には次の関数が含まれることがわかる。

$$\begin{aligned} \Gamma(f) &= \sum_{A=+, \times} \int_{S^2} d\hat{\Omega} (e^{2\pi i f L_1(1+\hat{\Omega} \cdot \hat{p}_1)} - 1) \\ &\quad \times (e^{2\pi i f L_2(1+\hat{\Omega} \cdot \hat{p}_2)} - 1) F_1^A(\hat{\Omega}) F_2^A(\hat{\Omega}) \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、

$$F_a^A(\hat{\Omega}) \equiv e_{ij}^A(\hat{\Omega}) \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_a^i \hat{p}_a^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_a}, \quad (a = 1, 2) \quad (16)$$

この関数は純粋に幾何学的なものであり、どのように振る舞うかで PTA によるシグナルの感度が変わることになる。この $\Gamma(f)$ を overlap reduction function と呼ぶ。

現在の PTA では $fL \gg 1$ であり、この場合では $\Gamma(f)$ の位相因子が無視できることが図 1 によりわかる。よって、次の関数を定義する。

$$\Gamma_0 \equiv \sum_{A=+, \times} \int_{S^2} d\hat{\Omega} F_1^A(\hat{\Omega}) F_2^A(\hat{\Omega}) \quad (17)$$

太陽系重心-パルサーのペアのなす角を ξ とすれば、積分をすることができて、

$$\Gamma_0 = \frac{4\pi}{3} \left\{ 1 + \frac{3}{2} (1 - \cos \xi) \left[\ln \left(\frac{1 - \cos \xi}{2} \right) - \frac{1}{6} \right] \right\} \quad (18)$$

となる。これをプロットしたものが図 2 であり、Hellings and Downs curve と呼ばれる。

3 結果

2.2 節では、異なるパルサー間の観測 データの相関を取ることで、ノイズに埋もれた背景重力波のシグナルを抜き出せることが示された。

2.3 節では、overlap reduction function が導出された。図の説明をすれば、図 1 は上から順に $\xi = \pi/8, 0.86, \pi/2$ の場合であり、実線は $\Gamma(f)$ 、破線は Γ_0 である。図を見ればわかるように $fL > 10$ を越えると位相因子の寄与を無視できることがわかる。また、図 2 は $\Gamma_0(\xi)$ の ξ 依存性をプロットしたものであり、Hellings and Downs curve と呼ばれる。図を見れば、 ξ が約 0.86, 2.12 の時に PTA の感度がゼロになることがわかる。さらに、計算により示せるが、 ξ が π の時の値は 0 の時の半分となっている。

4 まとめと考察

ここでは、PTA による背景重力波の検出理論についてレビューした。特に、ノイズに埋もれた背景重力波をどのようにすれば検出できるようになるのかを説明し、overlap reduction function の性質を図示した。

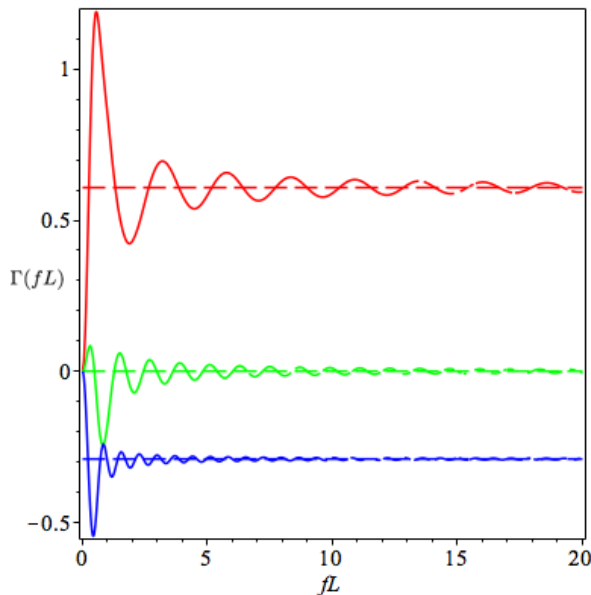


図 1: $\Gamma(fL)$ の fL 依存性と Γ_0 の関係

今回は、背景重力波の統計的性質として、定常性・ガウス性・等方性・無偏光を仮定した。しかし、これらの仮定はあくまで理想化であり、背景重力波の仮定を満たさないものも考えるべきである。例えば、非等方性、偏光があるならば、式 (14) のパワースペクトル密度は、 $\hat{\Omega}, A$ に依存することになる。

5 参考文献の書き方

- M.Anholm, S.Ballmer, J.Creighton, et al, Phys. Rev. D79, 084030, (2009)
 B. Allen and J. Romano, Phys. Rev. D59, 102001, (1999).

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号: YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。また、神戸大学のご支援に感謝します。

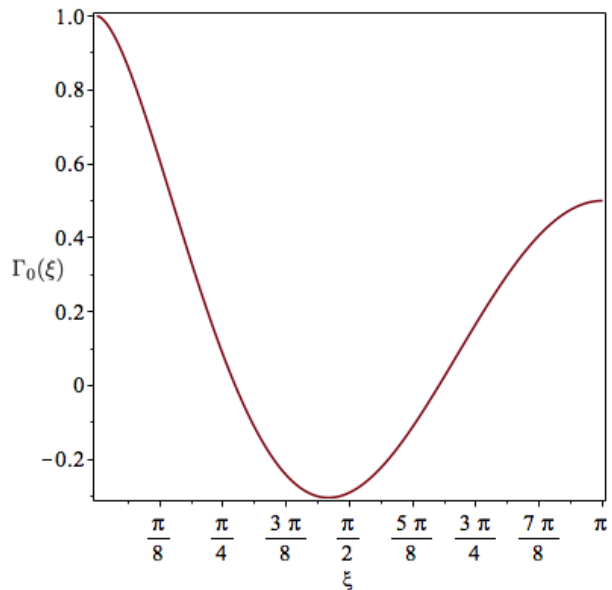


図 2: $\Gamma_0(\xi)$ の ξ 依存性