

## 重力チェレンコフ放射による重力波の速度と分散関係への制限

清田 哲史 (広島大学大学院 理学研究科)

### Abstract

重力波の伝搬速度は、一般相対性理論においては光速であると考えられているが、最も一般的な 2 階のスカラーテンソル理論を宇宙論に応用した模型のように、重力波の速度が光速からずれる理論モデルも存在する。重力波の伝搬速度が光速よりも遅くなる場合には、重力チェレンコフ放射と呼ばれる重力波放射が発生する可能性がある。超高エネルギー宇宙線の存在から重力チェレンコフ放射を用いて重力波の速度に制限を与えることが可能であり、重力理論のテストにも有用である。本講演では、初めに重力チェレンコフ放射を用いた重力波の制限についてレビューする。応用として、一般化された分散関係に対して重力チェレンコフ放射から課される制限を明らかにする。

### 1 Introduction

一般相対性理論により、重力波の存在、並びに重力波の伝搬速度は光速であるということが予言されている。しかし現在では様々なモチベーションからローレンツ不変性が破れることにより、重力波の伝搬速度が光速からずれるとする理論も提唱されている。例えば宇宙の加速膨張を説明するために提唱されている最も一般的な 2 階のスカラーテンソル理論では、重力波の伝搬速度は背景場に依存する。重力波の伝搬速度が光速よりも遅くなる場合、グラビトンはチェレンコフ放射に似た放射を発生するという理論的な予言がある。(Moore and Nelson, 2001) チェレンコフ放射は、何らかの媒質中で荷電粒子が光速を超えて運動するとき、すなわち物質自身が周囲に作る電磁場を追い越して運動するときに発生し、実際に水中での観測もなされている。同様に、ある物質（例えば光速で地球に降り注ぐ超高エネルギー宇宙線）が自身の出す重力波よりも速く運動するとき、チェレンコフ放射に似た放射（重力チェレンコフ放射）を発生すると考えることができる。このような場合、観測される宇宙線は重力チェレンコフ放射によってエネルギーを使い果たす前に地球に到達していなければならない。また重力波の伝搬速度が遅くなるほど、より多くのエネルギーが重力チェレンコフ放射に消費される。そのため光速と重力波の伝搬速度のずれに対して、次のような制限をかけることができる。

$$1 - c_s \lesssim 2 \times 10^{-17} \left( \frac{10^{11} \text{ GeV}}{p} \right)^{3/2} \left( \frac{1 \text{ Mpc}}{ct} \right)^{1/2} \quad (1)$$

ここで  $c_s$  は重力波の伝搬速度、 $p$  はプロトンの運動量であり、 $10^{11} \text{ GeV}$  は GZK 限界に由来する。また光の速度  $c$  を  $c = 1$  とした。

このように重力チェレンコフ放射による重力波の伝搬速度の下限は、宇宙線がはじめに持っていたエネルギーと移動距離に依存する。

また現在では、ローレンツ不変性が破れるとする理論の 1 つの結果として、分散関係が修正されるようなモデルが複数存在する。それらのモデルは一般化して

$$E^2 = p^2 c^2 + m_g^2 c^4 + A p^\alpha c^\alpha \quad (2)$$

と書くことができる。(Mirshkari et al.2011) (ここで  $A$  と  $\alpha$  は分散関係を修正するための変数である。また  $\alpha$  は無次元量であり、 $A$  は  $[\text{energy}]^{2-\alpha}$  の次元を持つ。さらに  $\frac{A}{(cp)^{2-\alpha}} \ll 1$  と仮定する。)

本発表ではまず (1) 式を導出することで、重力チェレンコフ放射が重力波の伝搬速度に対して制限をかけるプロセスを見る。次に (2) 式を用いて重力波の分散関係を修正し、そのとき重力チェレンコフ放射から得られる制限について明らかにする。

## 2 先行研究

プロトン 1 粒子が、光速で地球に降り注ぐ場合を考える。ここでは、最も一般的な 2 階のスカラーテンソル理論に対する制限についてレビューする (Kimura and Yamamoto, 2012)。以下  $c = 1$  とする。

また簡単のために背景場をミンコフスキー時空とし、複素スカラー場を考える。この時作用は

$$S_m = \int d^4x [-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \psi^* \partial_\nu \psi - m^2 \psi^* \psi] \quad (3)$$

であり、量子化された複素スカラー場は

$$\hat{\psi}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} [\hat{b}_{\mathbf{p}} \psi_p(t) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + \hat{c}_{\mathbf{p}}^\dagger \psi_p^*(t) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}] \quad (4)$$

ここで  $\hat{b}_{\mathbf{p}}$  と  $\hat{c}_{\mathbf{p}}^\dagger$  はそれぞれ粒子と反粒子の生成消滅演算子であり、

$$[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad , \quad [\hat{c}_{\mathbf{p}}, \hat{c}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

を満たす。また  $p$  はプロトンの運動量である。

モード関数は

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + p^2 + m^2 \right) \psi_p = 0 \quad (5)$$

規格化条件  $\frac{d\psi_p^*}{dt} \psi_p - \psi_p^* \frac{d\psi_p}{dt} = i$  を用いて

$$\psi_p(t) = \frac{e^{-i\Omega_p t}}{\sqrt{2\Omega_p}} \quad (6)$$

ここで  $\Omega_p = \sqrt{p^2 + m^2}$  とした。

次に重力波との相互作用をしらべるために、テンソル場  $h_{ij}$  を次のように導入する。

$$ds^2 = -dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \quad (7)$$

$h_{ij}$  は運動方程式、 $h_{ij} = 0$  を満たし、 $h_{ii} = 0$ 、 $\partial_i h_{ij} = 0$  の TT 条件を持つ。これを用いて最も一般的な 2 階のスカラーテンソル理論でのその作用は

$$S_h^{(2)} = \frac{1}{8} \int d^4x [\mathcal{G}_T (\dot{h}_{ij})^2 - \mathcal{F}_T (\partial_l h_{ij})^2] \quad (8)$$

と書ける。ここで  $\mathcal{G}_T$ 、 $\mathcal{F}_T$  は理論によって異なる値を取り、一般相対性理論では  $\mathcal{G}_T = m_{pl}^2 = \frac{1}{8\pi G_N}$ 、 $\mathcal{F}_T = m_{pl}^2 = \frac{1}{8\pi G_N}$ 。また  $m_{pl}$  はプランク質量であ

り、 $G_N$  は万有引力定数である。量子化されたテンソル場は

$$\hat{h}_{ij} = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{G}_T}} \sum_{\lambda=+, \times} \int \frac{dk}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [\epsilon_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} h_k(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \epsilon_{ij}^{*(\lambda)}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger(\lambda)} h_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}] \quad (9)$$

ここで  $\epsilon_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k})$  は分極テンソルであり、 $\mathbf{k} = (0, 0, k)$  のとき、

$$\epsilon_{ij}^{(\times)}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k_i \epsilon_{ij}^{(\lambda)} = 0$ 、 $\epsilon_{ii}^{(\lambda)} = 0$ 、 $\epsilon_{ij}^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda)ij} = 2$  を満たす。また  $k$  はグラビトンの運動量である。 $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  と  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  はグラビトンの生成消滅演算子で、 $[\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger(\lambda')}] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  を満たしている。これよりモード関数は

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + c_s^2 k^2 \right) h_k(t) = 0 \quad (10)$$

$c_s$  は重力波の伝搬速度であり、 $c_s^2 = \frac{\mathcal{F}_T}{\mathcal{G}_T}$  である。したがって一般相対性理論では  $c_s^2 = c^2$  に帰着する。

$\omega_k = c_s k$  として、(10) 式の解は

$$h_k(t) = \frac{e^{-i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}} \quad (11)$$

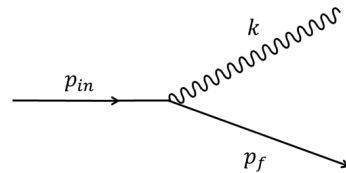


図 1: 運動量  $p_{in}$  を持ったプロトンが運動量  $k$  のグラビトンを放出して  $p_{in}$   $p_f$  となる

これよりグラビトン放射における全放射エネルギーは

$$E = \sum_{\lambda} \sum_{\mathbf{k}} \omega_k \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger(\lambda)} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \rangle = \frac{p_{in}^2}{4\pi \mathcal{G}_T} \int dk k^2 \sin^4 \theta T \delta(\omega_k + \Omega_{p_f} - \Omega_{p_{in}}) \quad (12)$$

また時間微分は

$$\frac{dE}{dt} = \frac{p_{in}^2}{4\pi G_T} \int dk k^2 \sin^4\theta \delta(\Omega_i - \Omega_f - \omega_k) \quad (13)$$

と書ける。ここで

$\Omega_i = \sqrt{p_{in}^2 + m^2}$ ,  $\Omega_f = \sqrt{(p_{in} - k)^2 + m^2}$ . また  $\delta(\Omega_i - \Omega_f - \omega_k) = 2\Omega_f \delta(\Omega_f^2 - (\Omega_i - \omega_k)^2)$  より、

$$\Omega_f^2 - (\Omega_i - \omega_k)^2 = -2p_{in}k \left( \cos\theta - \frac{c_s}{\beta} - \frac{(1 - c_s^2)k}{2p_{in}} \right) \quad (14)$$

ここで  $\beta = p_{in}/\sqrt{p_{in}^2 + m^2}$  である。

また  $\delta(0)$  となる解が存在するとき

$$\cos\theta - \frac{c_s}{\beta} - \frac{(1 - c_s^2)k}{2p_{in}} = 0 \quad (15)$$

のとき重力チェレンコフ放射が発生する。したがって

$$-1 \leq \cos\theta = \frac{c_s}{\beta} + \frac{(1 - c_s^2)k}{2p_{in}} \leq 1 \quad (16)$$

これが重力チェレンコフ放射が発生するための条件式である。また  $\beta \approx 1$  として

$$k_{max} = \frac{2p}{1 + c_s} \quad (17)$$

であることがわかる。

一方 (15) 式の解がないときは重力チェレンコフ放射は発生せず、すなわち  $c_s^2 \geq c^2$  である。

$\cos\theta$  についての解がある場合

$$\frac{dE}{dt} = \frac{p_{in}^2}{4\pi G_T} \int_0^{k_{max}} dk k \sin^4\theta \quad (18)$$

また  $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$  より

$$\theta^2 \simeq 2(1 - c_s) \left( 1 - \frac{k}{k_{max}} \right) \quad (19)$$

ここで、 $\sin\theta \approx \theta$  と近似して

$$\frac{dE}{dt} \simeq \frac{8(1 + c_s^2)^2}{3(1 - c_s^2)^2} G_N p^4 \sim \frac{p}{t} \quad (20)$$

したがって運動量  $p$  の粒子は

$$t \sim \frac{1}{G_N p^4} \frac{(1 + c_s^2)^2}{(1 - c_s^2)^2} \quad (21)$$

よりも長く移動することができない。

また重力波の音速と光速との間のずれは

$$(1 - c_s) \lesssim 2 \times 10^{-17} \left( \frac{10^{11} \text{GeV}}{p} \right)^{3/2} \left( \frac{1 \text{Mpc}}{ct} \right)^{1/2} \quad (22)$$

このように超高エネルギーの宇宙線の起源が宇宙論的距離にあるとすると、重力波の音速が光速より遅くなる場合、重力チェレンコフ放射によって重力波の音速に強い制限をかけることができる。

### 3 分散関係への制限

重力波の分散関係を

$$\omega_k^2 = k^2 c_s^2 + m_g^2 c_s^4 + A k^\alpha c_s^\alpha, \quad (23)$$

と修正する。ここで  $m_g$  はグラビトンの質量であり、 $A$  と  $\alpha$  は分散関係を修正するための変数である。また  $\alpha$  は無次元量であり、 $A$  は  $[\text{energy}]^{2-\alpha}$  の次元を持つ。さらに  $\frac{A}{(cp)^{2-\alpha}} \ll 1$  と仮定する。

重力チェレンコフ放射に起因する重力波の放射の仕事は (16) 式と同様であり、このときデルタ関数は

$$\delta(\Omega_i - \Omega_f - \omega_k) = \frac{\Omega_f}{p_{in}k} \delta\left(\cos\theta - f(k)\right) \quad (24)$$

ここで

$$f(k) = \frac{k}{2p} - \frac{c_s^2 k}{2p} \left( 1 + \frac{c_s^2 m_g^2}{k^2} + A(c_s k)^{\alpha-2} \right) + \frac{c_s}{p} \sqrt{p^2 + m^2} \sqrt{1 + \frac{c_s^2 m_g^2}{k^2} + A(c_s k)^{\alpha-2}} \quad (25)$$

これより重力チェレンコフ放射が発生するための条件は

$$-1 \leq \cos\theta = f(k) \leq 1. \quad (26)$$

ここで  $1 - c_s^2 = \delta$  とし、 $m_g \approx 0$ ,  $\frac{m^2}{p} \approx 0$  の近似を用いて整理すると

$$(k - p)(\delta - A k^{\alpha-2}) \leq 0 \quad (27)$$

$k - p \leq 0$  であるから、条件式 (27) は

$$\delta - A k^{\alpha-2} \geq 0 \quad (28)$$

と書くことができる。また  $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$  より

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dT} &= p^2 G_N \int_0^{k_{max}} dk k \frac{1}{p^2} \left( (k - p)(\delta - A k^{\alpha-2}) \right)^2 \\ &= G_N \left( \delta^2 p^4 + \frac{6A^2 p^{2\alpha}}{\alpha(\alpha-1)(2\alpha-1)} - \frac{48\delta A p^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \\ &\lesssim \frac{p}{t} \end{aligned} \quad (29)$$

これより  $\delta = 0$  の場合、 $A$  について

$$|A| \lesssim 10^{11(2-\alpha)-17} \left( \frac{\alpha(\alpha-1)(2\alpha-1)}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \frac{10^{11} \text{Gev}}{p} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1 \text{Mpc}}{ct} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Gev}^{2-\alpha} \quad (30)$$

したがって、 $\alpha = 3$ 、 $\alpha = 4$  のとき

$$|A| \lesssim 10^{-28} \text{Gev}^{-1} \quad (31)$$

$$|A| \lesssim 10^{-39} \text{Gev}^{-2} \quad (32)$$

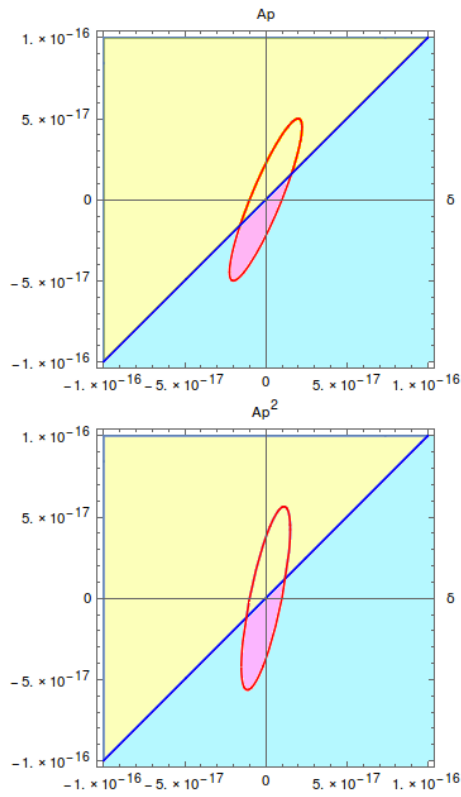
次に  $\delta \neq 0$  のときの  $\delta$  と  $A$  の関係を見る。

それぞれ  $\alpha = 3$ 、 $\alpha = 4$  のとき

$$\delta^2 p^4 + \frac{A^2 p^6}{5} - \frac{4\delta A p^5}{5} \lesssim \frac{p}{G_N t} \quad (33)$$

$$\delta^2 p^4 + \frac{A^2 p^8}{14} - \frac{2\delta A p^6}{5} \lesssim \frac{p}{G_N t} \quad (34)$$

(28), (33), (34) 式より  $10^{11} \text{Gev}$  の運動量のプロトンが  $1 \text{Mpc}$  の距離からやってくると仮定すると、



上図が  $\alpha = 3$  について、下図が  $\alpha = 4$  について、そ

れぞれ  $A$  と  $\delta$  と関係を表したものである。

$Ap \geq \delta$ 、 $Ap^2 \geq \delta$  の領域（図の黄色の領域）では重力チェレンコフ放射は発生せず、制限はかからない。赤の領域では重力チェレンコフ放射が発生しているが、宇宙線はエネルギーを使い切る前に地球に到達することができる。一方青の領域では、宇宙線は地球に到達することはできない。

$\alpha = 3$  のときと  $\alpha = 4$  のときとでは図にほとんど変化は見られない。また  $A$  の値が大きくなるに連れて、重力波の音速に対する制限は弱くなる。さらに  $A$  の負の領域に対して強い制限をかけることができる。

## 4 Discussion

分散関係が修正される様々なモデルについて、それぞれの  $A$  に対応するパラメータに対して制限をかけることが期待される。例として

*Double special relativity*:  $\alpha = 3$ 、 $A = \eta_{\text{dsrt}} L_p$   
ここで  $L_p$  はプランク長である。 $\delta = 0$  のとき

$$Ap \sim \eta_{\text{dsrt}} 10^{-8} \left( \frac{L_p}{10^{-33} \text{cm}} \right) \left( \frac{p}{10^{11} \text{GeV}} \right) \gtrsim -10^{-17} \quad (35)$$

$$\eta_{\text{dsrt}} \gtrsim -10^{-9}$$

*Extra-Dimension*:  $\alpha = 4$ 、 $A = -\alpha_{\text{edt}} L_p^2$   
 $\delta = 0$  のとき

$$Ap^2 \sim -\alpha_{\text{edt}} 10^{-16} \left( \frac{L_p}{10^{-33} \text{cm}} \right)^2 \left( \frac{p}{10^{11} \text{GeV}} \right)^2 \gtrsim -10^{-17} \quad (36)$$

$$\alpha_{\text{edt}} \lesssim 10^{-1}$$

などがある。他にも *Horava-Lifshitz* や *Non-commutative Geometries* のような、分散関係が修正されるモデルに対して幅広く制限をかけることが可能であり、今後多くの理論の検証に用いられることが期待される。

## Reference

- S.Mirshkari, N.Yunes, & M.Will, 2011, Phys. Rev. D 85, 024041  
G. D. Moore & A. E. Nelson, JHEP 09 (2001) 023  
R. Kimura & K. Yamamoto, JCAP 07 (2012) 050