$AdS_5\times\ M_5$ 時空におけるストリングの運動の可積分性

矢久間 司 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

p 次元の広がりを持つ物体は、それが存在する D 次元の時空に p+1 次元の軌跡を描く。
この軌跡に関して適当な作用を定義したとき、作用が最小となる条件が運動方程式であるが、変分を取る方向が複数なので偏微分方程式となる。
これは一般には積分不可能であり、広がった物体の振舞いを解析する事を難しくしている。
しかし時空に対称性が存在する場合、多くの保存量が存在している。よってそれに対応するキリングベクトルやキリングテンソルを用いてハミルトニアンを書き、軌道空間の測地線方程式を解く問題に帰着させることが可能である。
本発表ではまずミンコフスキー時空のストリング解について説明を行った後、それを AdS_5 時空に拡張し、そこに生えるストリング解の具体的な導出を行う。さらに AdS_5 時空と適当な 5 次元多様体の直積空間におけるストリング解についても議論する。

1 Introduction

粒子の運動は測地線方程式で表されるが、それは粒子の軌跡である世界線を最小にするものである。このとき粒子の運動に関するラグランジアン L と作用 S は次のように定義される。

しかし宇宙には空間的に広がりがあるものが多く、その発展を追おうというモチベーションが存在する。特にメンブレーン理論は宇宙自体をさらに高い次元の時空に埋め込まれた物体と見なすもので、本研究でストリングの運動を扱う動機となった。

ストリングが描く軌跡は世界線ではなく 2 次元の世界面であるため、その微小面積 dA を用いてラグランジアンと作用の定義を行う。ここで南部-後藤ストリングの作用を次のように定義し以降の議論に用いる。

2 Methods,Example

まずは 4 次元のミンコフスキー時空において空間的に広がりを持ったストリングの運動を考える。

4 次元ミンコフスキー時空には主に次のような対称性がある。

t,x,y,z 方向の並進対称性:P_μ

xy,yz,,zx 面内の回転対称性:L_i

x,y,z 方向のブースト変換に関わる対称性:K_i

空間的に広がったストリングが timelike な Killing-vector によって運ばれる例として、t 方向の並進と xy 面内の回転を合成したものを考える。

円柱座標を考えると、その様な Killing-vector は次の式で表される。但し Killing-vector は全体で time-like である為、内積は負になる。

この Killing-vector が世界面に接する場合を考えているので、界面の面積要素を求めるためには以下の手続きを踏むことになる。

世界面上のメトリックを次のようにおく。

この時、世界面上において Killing-vector と垂直な方向の長さを知る為に射影演算子を定義する。

射影演算子に 4 次元時空の微小量を二回掛けたものは、垂直な方向の長さの二乗となるから、以下に示した量は微小面積の二乗である。

3 Results

測地線方程式を求める場合と同様に、微小面積の二乗からラグランジアンを作ることが出来る。

ここからハミルトニアンを作ることができる。

この時 xy 回転の角変数がハミルトニアンに含まれない事から直ちに角運動量の保存が言えて、z も含まれない事から z 方向の運動量も保存。t も含まれないからエネルギーが保存。最終的にはハミルトニアンそれ自体の時間変化がない事から、ρ の運動方程式に落ち着く。

4 Discussion

xy 面内の回転に z 方向のブーストを合成した場合などは、キリングベクトルとハミルトニアンのみでは拘束条件が足りない。キリングテンソルが一つ加わって、ようやく可積分な形に直すことが出来る。AdS_5 においては時間が 2 つ存在するため、ブーストが複雑になる。

5 Conclusion

4 次元ミンコフスキー空間においては、常に解くことが出来るという事が示されているが、AdS_5 においては議論の余地がある。

6 参考文献

Strings in five-dimensional anti-de Sitter space with a symmetry(Tatsuhiko Koike et al. 2008)。

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号：YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。

その他謝辞がある場合は記入してください。

Reference

Tatsuhiko Koike, Hiroshi Kozaki, & Hideki Ishihara 2008