2015 年度 第 45 回 天文・天体物理若手夏の学校

宇宙マイクロ波背景輻射による宇宙のトポロジーの探索

小西 翔太 (近畿大学大学院 総合理工学研究科)

Abstract

2013 年に観測を終えた Planck 衛星によって宇宙マイクロ波背景輻射 (CMB) の観測から宇宙の空間成分はほぼ平坦であるという結果が出ている。しかし宇宙が平坦であるからと言って、宇宙が無限であるということは必ずしも言えない。平坦で有限なモデルの 1 つに 3 次元トーラスモデルがある。このモデルでは、観測者が次々と繰り返される周期的構造の中で「宇宙が果てしなく続いている」と錯覚する。宇宙の周期的構造を探るための手法として「空の円」がある。これは、2 つの「空の円」上の温度揺らぎが同一視できるか調べる手法である。実際に宇宙が周期的構造を持っている場合、2 つの異なる「空の円」上でそれぞれ同じ温度揺らぎのパターンが観測される可能性がある。「空の円」上で温度揺らぎの相関をとることで宇宙の大きさや形に制限をつけることができる。

1　はじめに

現代宇宙論では、一様等方宇宙が膨張している Friedmann-Lmaitre-Robertson-Walker モデル (FLRW モデル) が採用されている。FLRW モデルで扱うフリードマン方程式は Einstein 方程式の厳密解の 1 つであり、宇宙の平均エネルギー密度 ε_0 とハッブル定数 H_0 の値によって図 1 のように空間の曲率が決まる。

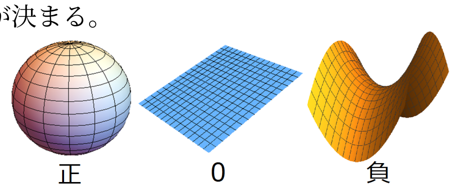

図 1: 定曲率空間

Planck 衛星による結果から、空間の曲率を決めるパラメータが $|\Omega_K| < 0.005$ と非常に 0 に近いことが分かっている。ゼロ曲率で多重連結性を持たせることで、空間的に閉じた宇宙と考えることができる。ただし宇宙が多重連結空間の構造を持つかは定かでないため、その探索方法が必要とされる。

2　トポロジー

トポロジーは距離や大きさに依らない空間の形を考える幾何学である。連続変形 (押しつぶす、捻る、引き延ばす) の下で空間の形を分類することができる。例えば図 2 のように、連続変形によって取っ手付きのコップがドーナツに変形できる。つまり取っ手付きのコップはドーナツと同じ位相をもつ。

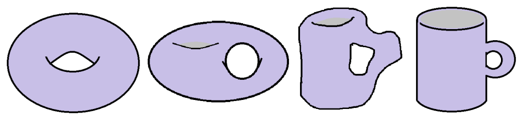

図 2: トポロジー

3　多重連結性

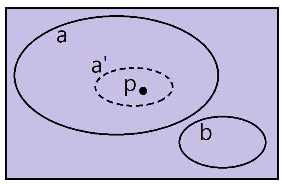

図 3: 2 次元平面と輪 $(a,\ b)$

空間上にある輪を連続的に移すことを考える。図 3 の 2 次元平面の場合、a は b に移り合える。図 4 の 2 次元トーラスの場合、c は d に移り合えるが、c と e と f は互いに移り合えない。

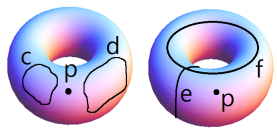

図 4: 2 次元トーラスと輪 (c, d, e, f)

また点 p（ある一点）に連続的に収縮することを考えることで単連結空間と多重連結空間を定義することができる。図 3 の 2 次元平面の場合、a は a' を経由して点 p に収縮する。図 4 の 2 次元トーラスの場合、c は点 p に収縮するが、e や f は収縮することができない。

空間上のすべての輪がある 1 点に収縮可能な空間が単連結空間であり、ある 1 点に収縮できない輪が存在する空間が多重連結空間である。

4　普遍被覆空間

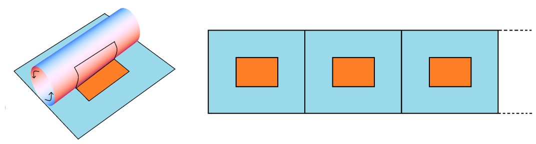

図 5: 2 次元トーラス

被覆空間とは、ある空間を連続的に射影することで被覆される空間である。図 6 のような円筒の場合、転がしていくことで (ローラーでペンキを塗ることを想像すればよい) 円筒の表面が平面に次々と射影される。この時、円筒の表面は多重連結空間であるが、被覆された平面は単連結空間である。被覆空間が単連結空間の場合を普遍被覆空間という。

5　2 次元トーラス

簡単のために 2 次元平面 (2 次元の宇宙) を考える。図 6 のように平面の向かい合う辺を平行移動で同一視することで 2 次元トーラスとなる。2 次元トーラスは多重連結空間である。

2 次元トーラスを普遍被覆空間に射影した場合、図 7 のように展開される。基本領域 (塗りつぶされた空

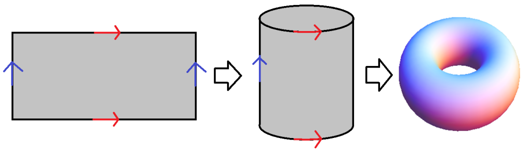

図 6: 2 次元トーラス

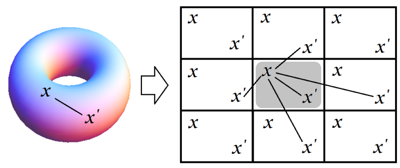

図 7: 2 次元トーラスの普遍被覆空間

間) を中心として同じ空間が連続して繰り返される。例えば x から x' までの経路は無数にある。つまり観測者は次々と繰り返される空間により「宇宙が果てしなく続いている」と錯覚する。

6　3 次元トーラス

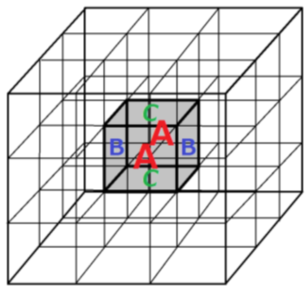

図 8: 3 次元トーラスの普遍被覆空間

宇宙の空間成分は 3 方向あるため、3 次元ユークリッド空間を考える。3 次元ユークリッド空間の各境界面 (A 面, B 面, C 面) をそれぞれ平行移動で同一視することで、3 次元トーラスができる。これを普遍被覆空間に射影すると図 8 のように展開される。簡単ために基本領域を長さ L の立方体として考える。

7　空の円

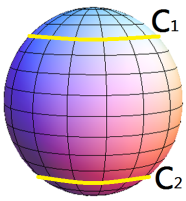

図 9: 空の円

宇宙が多重連結空間から成るならば、特有の周期構造が宇宙マイクロ波背景輻射 (CMB) の温度揺らぎに隠れているはずである。1996 年に Cornish たちは、定曲率空間ならばどのようなトポロジーに対しても適用可能な探索法を提案した。図 9 のように CMB の最終散乱面上に 2 つの円 (C_1 と C_2) を設定して、その円上の温度揺らぎや偏光が一致するかを確かめる手法である。

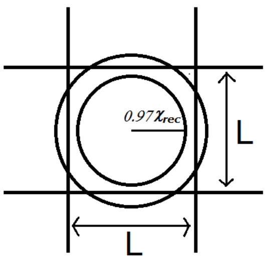

図 10: 最終散乱面と境界面の交わり

現在、Planck 衛星のデータが欧州宇宙機構 (ESA) から公開されている。その偏光と空の円を用いた解析から最終散乱面までの半径 $R_{lss}(= L/2)$ とその共動距離 χ_{rec} の関係が次のように制限されている (図 10 参考)。

$$R_{lss} > 0.97\chi_{rec} \tag{1}$$

8　解析方法

多重連結空間の構造により一致する空の円があるか解析するために、温度揺らぎの相関をとる。空の円の温度揺らぎの標本相関係数 r は

$$r = \frac{\sum_i \Delta T_{1i}\Delta T_{2i}}{\sqrt{\sum_i(\Delta T_{1i})^2 \sum_i(\Delta T_{2i})^2}} \tag{2}$$

のように取る。ΔT_{1i} と ΔT_{2i} は空の円の各温度揺らぎである。相関をもつ場合、$r = \pm 1$ に近い値をとる。相関を持たない場合、$r = 0$ に近い値をとる。また空の円が C_1 と C_2 で完全に一致するならば、$r = 1$ の値をとる。

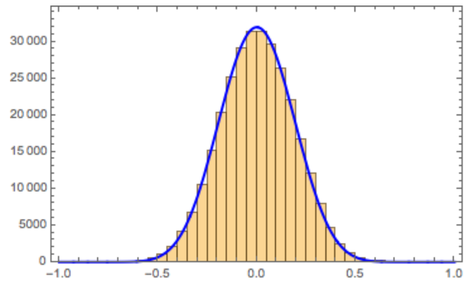

図 11: 標本相関係数のヒストグラムの例。横軸:相関係数 r、横軸:相関係数に対する数。bin の幅は 0.05。青色の曲線は (3) 式の理論値に bin の面積を掛けたもの。

図 11 は *Planck* 衛星の温度揺らぎを用いたヒストグラムである。空の円を最終散乱面上のあらゆる場所に対して無作為に設定し、標本相関係数 r を無作為抽出することで図 11 のように出力される。母相関係数 $\rho = 0$ の時の標本相関係数 r の確率密度 $f(r)$ は

$$f(r) = \frac{(1-r^2)^{\frac{N-3}{2}}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)} \tag{3}$$

にしたがう。N は空の円の温度揺らぎの数である。出力された値を用いて母相関係数の区間推定を行うことで、宇宙の構造を制限することができる。

Reference

“ Exploring Topology of the Universe in the Cosmic Microwave Background″ Inoue, Kaiki Taro Ph.D thesis Kyoto University (2001)

“ Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters” Planck Collabration: P. A. R. Ade et al. , arXiv:1502.01589 (2015)

“ Planck 2015 results. XVIII. Background geometry & topology” Planck Collabration: P. A. R. Ade et al. , arXiv:1502.01593 (2015)

2015 年度 第 45 回 天文・天体物理若手夏の学校

“ Constraining the Topology of the Universe” Nei J. Cornish et al. , Phys.Rev.Lett. (2004)