2015 年度 第 45 回 天文・天体物理若手夏の学校

曲がった時空中での光線における Fermat の原理の一般化

安西 悠 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

Fermat の原理とは、空間のある 2 点間を所要時間が最小となるような経路に沿って光は進むというものである。光は null 測地線に沿って運動すると考えられる。

(n+1) 次元時空は n-パラメータ族の時間的曲線で foliate される。その時間的曲線に沿って、n 次元空間での 2 点を結ぶ曲線を (n+1) 次元時空へユニークに持ち上げることが可能である。よって光線の終点への到達時間はこの 2 点間の空間距離の関数として書かれる。 Femat の原理とはこの関数の最小値を見つけることに等しい。よって、まず (n+1) 次元時空での Fermat の原理の定式化を行う。その後に制御工学における最適制御理論の観点に移り Fermat の原理の式を書き直し、それが null 測地線を導くことを示す。

1 Introduction

Fermat の原理は変分原理から導かれるものであるが、その作用の積分は空間に関する積分である。(n+1) 次元時空への拡張にあたっては時空の 2 点を固定して作用の変分を取れば良いと考えられるが、実際にはそう単純な話ではない。終点を固定してしまうとある問題が生じるからである。

2 Variational problem with fixed end point

(n+1) 次元時空の重力場中での粒子の作用は

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda L \tag{1}$$

$$L = \frac{1}{2}\left[\eta^{-1} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - m^2\eta\right] \tag{2}$$

である。但し、m : 粒子の質量，$x^\mu(\lambda)$: 粒子の経路，$\eta(\lambda)$: Lagrange の未定乗数。ドットは λ での微分を表す。

これは $\lambda \to \tilde{\lambda}$ というパラメータの付け替えに対して、

$$\eta \quad \to \quad \tilde{\eta} = \eta \frac{d\lambda}{d\tilde{\lambda}} \tag{3}$$

と η を変換すれば S は不変である。

$x^\mu, \dot{x}^\mu, \eta$ に関して変分を取ると、

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left[\frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\delta \dot{x}^\mu + \frac{\partial L}{\partial x^\eta}\delta\eta\right] \\ &= -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left[\frac{D}{d\lambda}(\eta^{-1}\dot{x}^\mu) + \frac{1}{2}(\eta^{-2} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + m^2)\delta\eta\right] + (\eta^{-1} g \end{aligned}$$

$\delta S = 0$ より、次の 3 式が得られる。

$$\frac{D}{d\lambda}\left(\eta^{-1}\dot{x}^\mu\right) = 0 \tag{5}$$

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -\eta^2 m^2 \tag{6}$$

$$\left(\eta^{-1} g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu \delta x^\mu\right)\Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} = 0 \tag{7}$$

Massive case では、始点 $x^\mu(\lambda_1) = x_1^\mu$ と終点 $x^\mu(\lambda_2) = x_2^\mu$ を固定して変分問題を考えることで、測地線方程式が得られる。x_2^μ は x_1^μ を頂点とする光円錐の内側にあり、従って x_1^μ と x_2^μ を結ぶ線は timelike 測地線となる。

Massless case では、x_1^μ と x_2^μ を結ぶ曲線が null 測地線となるためには、その曲線が光円錐と一致しなければならない。しかし光円錐の内側にある終点 x_2^μ に関しては始点と timelike 測地線と結ばれる。よってこのとき終点を固定してしまうと変分を良く定義できない。この問題を解決するために、x_2^μ の時間成分を固定しないようにする必要がある。

3 Generalized Fermat's principle

(n+1) 次元時空は τ で parameterize された n-parameter 族の timelike curve で foliate することができる。すると時空は (τ, x^i) で座標が張られたことと同義である。

座標 (τ, x^i) での時空の計量を次のように書く。

$$dS^2 = -\left(d\tau - g_i dx^i\right)^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j \tag{8}$$

ただし、$g_{00} = -1, g_i = g_{0i}, \gamma_{ij} = g_{ij} - g_i g_j$ である。null curve $x^\mu(\lambda)$ を考え、その接ベクトルを l^μ と書く。

$$l^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = (\dot{\tau}, \dot{x}^i) \tag{9}$$

null 条件より、

$$-\left(d\tau - g_i dx^i\right)^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j = 0 \tag{10}$$

$$\therefore \quad \dot{\tau} = g_i \dot{x}^i + \sqrt{\gamma_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} \tag{11}$$

よってこの式を用いて n 次元空間の曲線 $x^i(\lambda)$ を (n+1) 次元時空に持ち上げることができる。

始点と終点の座標をそれぞれ $x_1^\mu = (\tau_1, x_1^i), x_2^\mu = (\tau_2, x_2^i)$ とする。n 次元空間の曲線 $x^i = x^i(\lambda)$ が変化すると (n+1) 次元空間に持ち上げられる null curve も変化する。n 次元空間での曲線の変化をパラメータ ε で表し、$\varepsilon = 0$ で (n+1) 次元時空に持ち上げられた曲線が null 測地線となるように選ぶ。

今、作用 S は ε の関数であり、式 (5),(6) が満たされている時、

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon S &= \eta^{-1} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \delta x^\mu \big|_{\lambda_2} \\ &= \eta^{-1}(\lambda_2)\left(l_i \delta x_2^i + l_\tau \delta\tau_2\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

$\delta x_2^i = 0, \eta^{-1} l_\tau \neq 0$ より、

$$\left.\frac{\partial \tau_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{13}$$

これは $\tau_2(\varepsilon)$ の極値を与えており、Fermat の原理を表していると考えられる。

4 Optimal control theory

制御システム

$$\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} = f^\mu(x(\lambda), u(\lambda)) \tag{14}$$

が与えられているとする。最適制御問題とは、次の評価関数 J が最小となるような制御（最適制御）u を求めることである。

$$J = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda f^0(x(\lambda), u(\lambda)) \tag{15}$$

ここで、f^0 は与えられた関数である。

J を次のように書き換えることができる。

$$J = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \left[\psi_0 f^0(x(\lambda), u(\lambda)) + \psi_i \left(f^i - \frac{dx^i}{d\lambda}\right)\right] \tag{16}$$

ここで、ψ_0 は定数である。

x^μ, u^i, ψ_i に関して変分をとると、$\delta J = 0$ より、

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\psi_0 f^0 + \psi_i f^i\right) = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\psi_0 f^0 + \psi_i f^i\right) + \frac{d\psi^\mu}{d\lambda} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\psi_0 f^0 + \psi_i f^i\right) = 0 \tag{19}$$

$$f^i - \frac{dx^i}{d\lambda} = 0 \tag{20}$$

が得られる。$\mathcal{H} \equiv \psi_0 f^0 + \psi_i f^i$ とすると、以上より次が成り立つことがわかる。

$$\frac{d\psi_\mu}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} \tag{21}$$

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_\mu} \tag{22}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^i} = 0 \tag{23}$$

(21),(22) 式は Hamilton 方程式の形である。また、(23) 式は Pontryagin の最小原理と呼ばれるものである。

今回の場合、制御システムと評価関数は次のようになる。

$$\frac{dx^0}{d\lambda} = \mathcal{Q}(x^\mu, u^i) \tag{24}$$

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = u^i \tag{25}$$

$$\mathcal{Q}(x^\mu, u^i) = g_i(x^\mu) u^i + \sqrt{\gamma_{ij}(x^\mu) u^i u^j} \tag{26}$$

$$J = \int_{x_1^\mu}^{x_2^i} d\lambda \mathcal{Q}(x^\mu(\lambda), u^i(\lambda)) \tag{27}$$

すると、J の値はある 2 点間を進む光の経過時間 $\delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ となる。Femat の原理から、光線の軌道は最小の J を与える。

$\mathcal{H}(\psi, x^\mu, u^i) = \psi_0 \mathcal{Q} + \psi_i u^i$ だから、対応する Hamilton 方程式と Pontryagin の最小原理は、

$$\frac{d\psi_\mu}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} = -\psi_0 \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x^\mu} \tag{28}$$

$$\frac{dx^0}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_0} = \mathcal{Q} \tag{29}$$

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i} = u^i \tag{30}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^i} = \psi_0 \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u^i} + \psi_i = 0 \tag{31}$$

(31) 式を用いて (28)-(30) 式を書き直すと次のようになる。

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\psi_0 \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^i}\right) - \psi_0 \frac{\partial Q}{\partial x^i} \tag{32}$$

$$\frac{d\psi^0}{d\lambda} = -\psi_0 \frac{\partial Q}{\partial x^0} \tag{33}$$

$$\frac{dx^0}{d\lambda} = Q \tag{34}$$

ここで、

$$Q = \mathcal{Q}(x^\mu, u^i = \dot{x}^i) \tag{35}$$

$$= g_i \dot{x}^i + \sqrt{\gamma_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j} \tag{36}$$

である。

(32)-(34) 式をまとめると次の式が得られる。

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial Q}{\partial x^i} - \frac{\partial Q}{\partial x^0}\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^i} = 0 \tag{37}$$

この式は null 線の軌道を決定する方程式である。

5 Consistency

(n+1) 次元時空の測地線方程式は、$\frac{D}{d\lambda}\left(\eta^{-1}\dot{x}^\mu\right) = 0$ より、

$$\frac{D\dot{x}^\mu}{d\lambda} = \tilde{F}\dot{x}^\mu, \quad \tilde{F} = \eta^{-1}\dot{\eta} \tag{38}$$

この式に null 条件を課して具体的に書き下すと次のようになる。

$$\gamma_{ij}\frac{\mathcal{D}^2 x^j}{d\lambda^2} + \tilde{B}_i^{(0)} + \tilde{B}_i^{(1)} U + \tilde{B}_i^{(2)} U^2 = \tilde{F}_i \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_i^{(0)} &= g_k \dot{x}^k \gamma_{ij,0}\dot{x}^j - \frac{1}{2} g_i \gamma_{jk,0}\dot{x}^j \dot{x}^k \\
\tilde{B}_i^{(1)} &= g_{i,0} g_k \dot{x}^k + \gamma_{ij,0}\dot{x}^j - g_i g_{k,0}\dot{x}^k + (g_{i,j} - g_{j,i})\dot{x}^j \\
\tilde{B}_i^{(2)} &= g_{i,0}, \quad \tilde{F}_i = \tilde{F}\gamma_{ij}\dot{x}^j
\end{aligned} \tag{40}$$

ここで、

$$\frac{\mathcal{D}^2 x^j}{d\lambda^2} = \frac{d^2 x^j}{d\lambda^2} + \mathcal{T}^i_{jk}\dot{x}^j \dot{x}^k \tag{41}$$

$$\mathcal{T}^i_{jk} = \frac{\gamma^{in}}{2}\left(\gamma_{jn,k} + \gamma_{kn,j} - \gamma_{jk,n}\right) \tag{42}$$

である。

次に、前節で導出した Hamilton 方程式

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial Q}{\partial x^i} - \frac{\partial Q}{\partial x^0}\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^i} = 0 \tag{43}$$

を具体的に書き下すと、

$$\gamma_{ij}\frac{\mathcal{D}^2 x^j}{d\lambda^2} + B_i^{(0)} + B_i^{(1)} U + B_i^{(2)} U^2 = F_i \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
B_i^{(0)} &= g_k \dot{x}^k \gamma_{ij,0}\dot{x}^j - \frac{1}{2} g_i \gamma_{jk,0}\dot{x}^j \dot{x}^k \\
B_i^{(1)} &= g_{i,0} g_k \dot{x}^k + \gamma_{ij,0}\dot{x}^j - g_i g_{k,0}\dot{x}^k + (g_{i,j} - g_{j,i})\dot{x}^j \\
B_i^{(2)} &= g_{i,0}, \quad F_i = \left(\frac{1}{U}\frac{dU}{d\lambda} + g_{k,0}\dot{x}^k + \frac{1}{2U}\gamma_{kl,0}\dot{x}^k \dot{x}^l\right)\gamma_{ij}\dot{x}^j
\end{aligned} \tag{45}$$

よって左辺については、

$$\tilde{B}_i^{(0)} = B_i^{(0)}, \quad \tilde{B}_i^{(1)} = B_i^{(1)}, \quad \tilde{B}_i^{(2)} = B_i^{(2)} \tag{46}$$

であることが分かる。

右辺については、

$$\tilde{F}_i = \eta^{-1}\dot{\eta}\gamma_{ij}\dot{x}^j = \frac{d}{d\lambda}(log\eta)\,\gamma_{ij}\dot{x}^j \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
F_i &= \left(\frac{d}{d\lambda}(logU) + \frac{\partial}{\partial x^0}\left(g_i \dot{x}^i + U\right)\right)\gamma_{ij}\dot{x}^j \\
&= \frac{d}{d\lambda}(logU)\,\gamma_{ij}\dot{x}^j
\end{aligned} \tag{48}$$

よって、$\eta \rightarrow U$ とすると (39) 式と (44) 式は等価であることが分かる。

6 Conclusion

(n+1) 次元時空を (τ, x^i) で座標を張ると、null 測地線に沿って運動する光の到達時間は最小になる ($\delta\tau = 0$)。最適制御理論の観点から、この式を書き直した結果 null 測地線方程式が得られ、逆もまた成り立つことが示された。

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号：YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。

Reference

Valeri P. Frolov 2013, arXiv:1307.3291v1

L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, & E.F. Mishchenko 1962, The Mathematical Theory of Optimal Processes