Brane Induced Gravity model in $D = 6$

平野　進一 (立教大学 理学研究科)

Abstract

高次元時空に 4 次元時空が埋め込まれていると考えるモデル (Brane Induced Gravity model) が、宇宙論ではよく調べられる。特に、5 次元の場合が、よく調べられる。そこでは高次元に埋め込まれたことによる修正が brane 上の観測可能な領域に姿を現さない。そこで次元を上げた 6 次元で、観測可能領域に修正が現れないかを考える。数値計算の結果、2 つの解が得られ、degravitating solution と呼ばれる、時間が経つと静的な解に落ち着く解と、superaccelerating solution と呼ばれる Habble parameter H が無限に成長する解になる。前者は、現象論的に棄却され、後者は、その不安定性から ghost をもつと考えられる。つまり、6 次元に次元を上げても、修正をかけることは、難しい。

1 Introduction

今日、一般相対論 (GR) は太陽系スケールでは、ほぼ 100 % 正しい理論である。宇宙論的長距離スケールでは、宇宙の後期加速膨張や宇宙項問題など、今の GR だけでは解決しきれていない事実もある。これらの事実を説明すべく修正重力理論の研究は盛んに行われるようになった。今回レビューを行う論文 [1] では、6 次元の時空 (bulk) に 4 次元の時空 (brane) が埋め込まれている状況を考え、brane 上のハッブル進化が宇宙論的距離スケールでどのように修正を受けるのかを議論する。このようなモデルは Brane Induced Gravity(BIG)model と呼ばれていて、特に 5 次元の場合の、DGP model[2] がよく知られている。そこでは、normal/self-accelerating branch と呼ばれる解が存在する。前者は、摂動的に不安定で ghost をもっている。一方、後者は、摂動的にも安定な解になっている。しかし、その修正を受ける目安となる crossover scale が、

$$r_{\mathrm{c}}^{(5)} \gtrsim 3H_0^{-1} \tag{1}$$

となっており、観測にかかる範囲では修正がなされない。このような困難を解決するために高次元への一般化 ($D > 5$) がなされた。6 次元の BIG model では、brane から発せられる自身の運動に影響を与える bulk 重力波に起因して、解析的には解けない。数値計算の解としては、degravitating/superaccelerating solution が存在する。前者は、時間発展とともに静的な解 (cosmic string) に degravitate していく解で、現象論的に棄却される。後者は、H が無限に成長していく解で、これは DGP の self-accelerating branch に類似することから、摂動的に不安定であると期待される。後に、F.Niedermann と R.Schneider により、不安定で ghost をもつ解であることが示された [3]。よって、修正重力理論としての 6 次元の BIG model は、うまくいかない。

2 model

6 次元の BIG model の action は、

$$S = S_{\mathrm{EH}} + S_{\mathrm{BIG}} + S_{\mathrm{m}}[h] \tag{2}$$

$$S_{\mathrm{EH}} = M_6^4 \int d^6x\sqrt{-g}R^{(6)}$$

$$S_{\mathrm{BIG}} = M_{\mathrm{pl}}^2 \int d^4x\sqrt{-h}R^{(4)}$$

$S_{\mathrm{m}}[h]$: brane 上に局在している matter

となる。h は、g の induced metric である。しかし、$D > 5$ での BIG model では、bulk metric が brane 上で発散してしまう問題を回避するために、regularization を行う必要がある。今回は、static regularization と呼ばれる regularization を用いる。この regularization は、brane を一つの余剰次元方向に巻きつけ、Topology を $S_1 \times M_4$（円筒の半径は R）にするもので、後に出てくる結果に regularization が与えられる影響を最小とする。これにより brane の action は変

更を受け、

$$S_{\rm BIG} = M_5^3 \int d^5x\sqrt{-h}R^{(5)} \tag{3}$$

$M^3_{(5)} = M_{\rm pl}^2/2\pi R$ とする。

3 Bulk geometry

簡単のために、brane は空間的に平坦、軸対称性を、bulk は均一・等方性を課す。結果、bulk metric は、

$$ds_6^2 = e^{2(\eta-3\alpha)}(-dt^2+dr^2) + e^{2\alpha}d\boldsymbol{x} + r^2e^{-6\alpha}d\phi^2 \tag{4}$$

となる。この metric は、Einstein-Rosen coordinate として知られている。α, η は、r, t の関数である。ここから、円筒外側の領域での Einstein 方程式を解くことができ、

$$\partial_t^2\alpha = \partial_r^2\alpha + \frac{1}{r}\partial_r\alpha \tag{5}$$

$$\partial_r\eta = 6r[(\partial_r\alpha)^2 + (\partial_t\alpha)^2] \tag{6}$$

$$\partial_t\eta = 12r(\partial_r\alpha)(\partial_t\alpha) \tag{7}$$

となる。

4 Brane geometry

brane metric は、

$$ds_5^2 = -d\tau^2 + e^{2\alpha_0}d\boldsymbol{x}^2 + R^2d\phi^2 \tag{8}$$

となる。ここで、下付き添字 "0" はテンソルの足ではなく、brane の変数であることを表す。また、τ は、brane の固有時間を表し、$t = t(\tau)$, $r_0 = r_0(\tau)$ である。ここで、$r_0(\tau)$ は、brane の軌道である。bulk 時間 t と brane の固有時間 τ との関係は、$r = r_0$(brane 上) で $ds_6^2 = ds_5^2$ であることを課すので、

$$d\tau = \frac{e^{-3\alpha_0}}{\gamma}dt \tag{9}$$

$$\gamma \equiv \frac{e^{-\eta_0}}{\sqrt{1-\dot{r}_0}} = \sqrt{e^{-2\eta_0} + \dot{r}_0^2e^{-6\alpha_0}} \tag{10}$$

$\dot{r}_0 = \frac{dr_0}{d\tau}$ となる。ここで円筒が自己重力で潰れないように、

$$R = r_0e^{-3\alpha_0} = {\rm const} \tag{11}$$

を仮定する。これにより、$M_5^3 = M_{\rm pl}^2/2\pi R = {\rm const}$ となり、これを実現するために brane の ϕ 方向への brane tension P_ϕ を導入する。この P_ϕ は、物理的に reasonable であるためには null energy condition を満たす必要がある。ハッブル進化を記述するために、scale factor を $a(\tau) \equiv e^{\alpha_0}$ と定義し、Hubble parameter を $H(\tau) \equiv \dot{a}/a = \dot{\alpha_0}$ と定義する。これより (10) から、

$$\dot{r}_0 = 3Hr_0$$

を得る。ここから、(9) も書き換えられ、

$$\gamma = \sqrt{e^{-2\eta_0} + 9H^2R^2} \tag{12}$$

を得る。流体の仮定として、局所化した energy-momentum tensor を、

$$T_{ab}^{(5)} = \frac{1}{2\pi R}{\rm diag}(-\rho, P, P, P, P_\phi) \tag{13}$$

として、$R =$ 一定 の条件を満たせば、

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \tag{14}$$

となり、4 次元のスタンダードな保存則を満たすことがわかる。

5 Junction condition

円筒の内側と外側の領域を、brane を境界としてつないでいく。6 次元の metric を g_{AB}、5 次元の induced metric を h_{ab} と定義する。action を $S = S_{\rm EH} + [S_{\rm BIG} + S_{\rm m}[h]]$ とみて、g_{AB} で変分をとり、r 方向の微小区間で積分を行えば、

$$M_6^4\{[K]h_{ab} - [K_{ab}]\} = T_{ab}^{(5)} - M_5^3G_{ab}^{(5)} \tag{15}$$

$[K_{ab}] = K_{ab}^{\rm out} - K_{ab}^{\rm in}$ となる。さらに内側が、brane に影響を与えないよう、$K_{ab}^{\rm in}$ を静的な円筒にとれば、

$$K^{\phi}_{\rm in\ \phi} = \frac{1}{R}\ ,\ K^0_{\rm in\ 0} = K^i_{\rm in\ j} = 0$$

となる。brane に対する normal vector は、

$$n^A = e^{3\alpha_0}(3HR, \gamma, 0, 0, 0, 0) \tag{16}$$

ととれる。これより K_{out} が計算できる。

junction condition の (0, 0) 成分から、修正 Friedmann 方程式：

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_{\rm pl}^2} + \frac{1}{r_{\rm c}^2}(\gamma - 1) \tag{17}$$

が得られる。ここで $r_{\rm c}^2 \equiv 3M_{\rm pl}^2/2\pi M_6^4$ である。修正項は、H^{-1} と $r_{\rm c}$ の大小関係により効き具合が変わってくる。よって、観測可能な領域での修正が実現される。また、宇宙項問題の糸口としては、この修正項をダークエネルギーの項とみなせる。定量的議論には、bulk Einstein 方程式 (5) を解く必要がある。

junction condition の (i, j) 成分から、

$$\dot{H} = -\frac{3}{2f(\tau)} \times \left[\frac{P}{3M_{\rm pl}^2} + H^2 - \frac{1}{r_{\rm c}}(\gamma g(\xi,\chi) - 1)\right] \tag{18}$$

$$f(\tau) \equiv 1 - \frac{9R^2}{2r_{\rm c}^2\gamma} \tag{19}$$

$$\xi \equiv r\partial_r\alpha\,|_0 \ , \quad \chi \equiv \frac{H^2R^2}{\gamma^2}$$

$f(\tau)$ は、stable/unstable な領域を区別する役割を果たす。

junction condition の (ϕ,ϕ) 成分から、P_ϕ が決定でき、

$$\frac{P_\phi}{3M_{\rm pl}^2} = -\dot{H}\left(1 - \frac{3R^2}{r_{\rm c}^2\gamma}\right) - 2H^2 + \frac{6\gamma}{r_{\rm c}^2}\{\chi + [3\chi - \xi(9\chi - 1)]^2\} \tag{20}$$

P_ϕ は、数値解析の時に、null energy condition を満たすかどうかのチェックする必要がある。

6 static solution

dynamical な解を見る前に、静的な場合の geometry を見ていく。静的な場合は、$\dot{r}_0 = 0$ 、metric function は r のみの関数となる。このとき、外側の Einstein 方程式 (5) は、

$$\alpha = c\log\left(\frac{r}{r_c}\right) + \alpha_0 \ , \ \eta = 6c^2\log\left(\frac{r}{r_0}\right) + \eta_0 \tag{21}$$

brane に接する座標で rescaling すればいつでも $\alpha_0 = 0$ にとれる。c, η_0 は、(20)(21) から、

$$\eta_0 = -\log\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\rm crit}}\right) \tag{22}$$

$$c = \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{\frac{2\rho_{\rm crit} + (1+3\omega)\rho}{2(\rho_{crit} - \rho)}}\right) \tag{23}$$

$$\text{EOS} : P/\rho = \omega \ , \ \rho_{crit} \equiv 2\pi M_6^4$$

(26) から真数条件より、$\rho < \rho_{crit}$ のみが許される。(20) と 6 次元 metric は、

$$P_\phi = 6c^2(\rho_{crit} - \rho) \tag{24}$$

$$ds_6^2 = e^{2\eta_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{12c^2-6c}(-dt^2 + dr^2) + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2c}d\boldsymbol{x}^2 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-6c}r^2d\phi^2 \tag{25}$$

である。これは、静的な円筒の metric である。4 次元の pure な brane tension を考えれば、

$$\rho = -P \equiv \lambda \tag{26}$$

これにより、(27) から $c = 0$ であるので、(29) から、

$$P_\phi = 0 \tag{27}$$

である。さらにここで、

$$(\bar{t}, \bar{r}) = (e^{\eta_0}t \ , \ e^{\eta_0}(r - r_0) + r_0) \tag{28}$$

と rescaling すれば、metric は、

$$ds_6^2 = -d\bar{t}^2 + d\bar{r}^2 + d\boldsymbol{x}^2 + W(\bar{r})^2d\phi^2 \tag{29}$$

$$W(\bar{r}) = \begin{cases} \bar{r} & \bar{r} \leq r_0 \\ \frac{\delta}{2\pi}r_0 + \left(1 - \frac{\delta}{2\pi}\right)\bar{r} & \bar{r} > r_0 \end{cases} \tag{30}$$

ここで δ:deficit angle($\delta \equiv \lambda/M_6^4$) である。この metric は、cosmic string[4] の高次元への一般化になっていて、brane geometry は平坦となり、brane 上のエネルギーのみが extrinsic curvature に影響を及ぼす。高次元では、deficit angle δ によって特徴付けられる特異な geometry になる。今回、Einstein-Rosen coordinate を用いている影響で $\rho < \rho_{\rm crit}$ の subcritical な場合のみを考えることが許される。

7 nummerical solution

dynamical な解を扱うには、bulk 重力波の影響が出てくるので、bulk geometry に何かしらの制限を課さない限り、brane の閉じた方程式系が得られない。この問題は、DGP でも起きた。DGP では、bulk は flat であるという仮定をして pure な brane tension を導いている。つまり、dynamical な解を得るためには、制限を課さず（考えればできる可能性があるのかもしれないが）数値的に振る舞いを確かめる必要がある。系の進化を記述するには、Einstein 方程式 (5)~(7) と $\dot{H}$ の式 (21) に ω , $H_{\rm i}r_{\rm c}$, $H_{\rm i}R$, $\rho_{\rm i}$ を与えればよい。(i:initial) その振る舞いは、$f(\tau)$ の値によって、２通りの振る舞いをする。

7.1 degravitatimg solution

この解は、時間が経つと、$H \to 0$ の静的な場合に落ち着く。論文では、例として

$$\omega = -1\ ,\ H_{\rm i}r_{\rm c} = \frac{1}{10}\ , H_{\rm i}R = \frac{1}{20}\ ,$$
$$\rho_{\rm i} = \frac{4}{5}\rho_{\rm crit} \tag{31}$$

を初期条件に用いている。$r_{\rm c} > 1/H_{\rm i}$ の領域なので、通常の４次元 Friedmann 方程式からは、大きく修正を受けるはずである。結果は Fig.2 になる (グラフは [1] を参照)。2(a) では、H の時間発展のグラフで、時間が経つと最終的に静的な場合に落ち着く様子を表し、これが brane geometry が flat になる間に brane tension がどのように extrinsic curvature に吸収されるのかを表す。2(b) は、α の時間発展のグラフで r 方向に伝わる bulk 重力波の伝播の様子が伺える。漸近的に一定になるように、変化する。2(c) は、P_ϕ の時間発展を表し、null energy condition を満たしていることが確かめられる。2(d) では、６次元での有効エネルギー密度 $\hat{\rho}$ ($\equiv \rho - 3M_{\rm pl}^2H^2$) が、brane のエネルギー密度を吸いとっていく様子がみてとれる。よって、安定性は別として、振る舞いは、妥当そうである。しかし、この解は、現象論的に許されない。

7.2 superaccelerating solution

degravitating solution とは振る舞いが大きく異なり、H は無限に成長し続ける。この解は、不安定で、null energy condition を破る。こちらの初期値もほぼ同じ値を与えるが、$H_{\rm i}r_{\rm c}$ のみ異なる値を与える、

$$\omega = -1\ ,\ H_{\rm i}r_{\rm c} = \frac{1}{4}\ ,$$
$$H_{\rm i}R = \frac{1}{20}\ ,\ \rho_{\rm i} = \frac{4}{5}\rho_{\rm crit} \tag{32}$$

すると degulavitating solution とは、全く異なる振る舞いをみせる。結果は、Fig.3 になる。3(a) は、H が無限に成長することを示し、3(b) は、brane が成長して bulk 上を伝播することを表している。3(c) からは、P_ϕ が null energy condition を満たさず、非物理的であることが示され、3(d) は、bulk の有効エネルギー密度が負に成長していく様子が描かれる。この解は従って解は不安定なものになっている。このような解は、DGP model の self-acceleratimg branch に類似することから、ghost をもっているのではないかと [1] では、議論している。実際に、その ghost 不安定性は、証明されている。[3] これより、解は両方とも許されず、モデルは棄却される。

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号：YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。

Reference

[1]F.Niedermann & R.Schneider & S.Hofmann & J.Khoury, (2015), [arXiv: 1410.0700]

[2]G.Dvali & G.Gabadadze & M.Porrati, (2000), [arXiv: hep-th/0005016]

[3]L.Eglseer & F.Niedermann & R.Schneider, (2015), [arXiv: 1506.02666[gr-qc]]

[4]A.Vilenkin, (1981), [Phys. Rev. D 23, 852]