

# Multi-field effect on Non-Gaussianity in Starobinsky inflation

森 太郎 (総合研究大学院大学素粒子原子核専攻 5 年一貫博士課程 2 年)

## Abstract

今回の発表では、Ricci スカラーとその 2 乗の作用に基づいた所謂 Starobinsky inflation (あるいは  $R^2$  inflation) model にさらにスカラー場のセクターを追加した Two-field inflation model において、model を選別していく上で重要となる量である曲率ゆらぎの NonGaussianity の計算方法を紹介する。特にスカラー場の運動項が Canonical に規格化されていないような場合には、field space が非自明な計量を持つが、そのような場合に field space において微分幾何学的な手法を用いる点に注目して議論する。

## 1 Introduction

### 1.1 Inflation

Inflation とは極めて初期の宇宙で時空が指数的に膨張したと考える理論である。このように考えることで、地平線問題や平坦性問題などの標準ビッグバン理論がもつ問題は解決される。現在ではこの指数的膨張を実現するような model は非常に数多く提唱されている。しかし曲率ゆらぎの Power spectrum 及び Non-Gaussianity と呼ばれる量を計算し、宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background, CMB) の観測から得られる CMB の温度ゆらぎを比較することで、model を選別することができる。

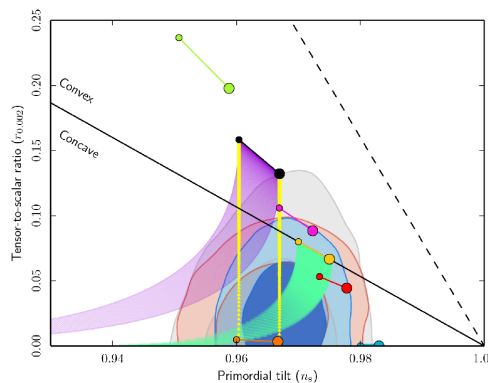


図 1: Planck collaboration による CMB 観測の結果. テンソル/scalar 比  $r$  とスペクトル指数  $n_s$  は Inflation model を評価する指標となる。

近年の Planck-BICEP2-Keck Array の合同発表の結果によれば、テンソル/スカラー比、スペクトル指数などの量が観測と整合的であり有力視されている model として、Ricci スカラーとその二乗を足した作用に基づくいわゆる Starobinsky 模型が挙げられる。本研究ではこの model を拡張した場合を解析していく。

### 1.2 Non-Gaussianity

広い意味での Non-Gaussianity は、ある分布が与えられたときその分布が Gauss 分布からどれだけズレているかを示す指標、と言える。Inflation の模型の選別の際によく用いられるのは、曲率ゆらぎの空間分布である (ただし多くの場合波数空間で議論される)。この Non-Gaussianity を数式で表すことを考える。曲率ゆらぎを示す量として、特にゲージ不変な摂動量  $\zeta = \psi + \frac{H}{\dot{\rho}} \delta\rho$  を採用する。この  $\zeta$  の 3 点関数を、

$$\begin{aligned} \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle \\ = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \end{aligned} \quad (1)$$

と表す。もし  $\zeta$  が Gauss 分布に従うなら、右辺は 0 である。従って、この 3 点関数が 0 からどれだけズレているかが、その分布が Gauss 分布からどれだけズレているかを示す指標となり得る。右辺の  $B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$  は様々な  $\mathbf{k}$  依存性がありえるが、今回の発表では特に、

$$\begin{aligned}
 & \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle_{f_{NL}^{local}} \\
 &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{H_*^4}{k_1^3 k_2^3 k_3^3} \\
 & \times \left[ -\frac{6}{5} f_{NL}^{local} (N_{,I} N^{,I})^2 \right] [k_1^3 + k_2^3 + k_3^3]
 \end{aligned} \tag{2}$$

という  $\mathbf{k}$  依存性を持つ項に注目し、 $f_{NL}^{local}$  を計算する formalism について議論する。

## 2 Set Up

出発地点となる作用は、

$$\begin{aligned}
 S_J = \int d^4x \sqrt{-g} & \left[ \frac{m_{pl}^2 R}{2} + \frac{\mu}{2} R^2 \right] \\
 & + \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 \right]
 \end{aligned} \tag{3}$$

である。作用の重力のセクターを  $S_G$  とし、

$$\begin{aligned}
 S_G = \int d^4x \sqrt{-g} & \left[ \frac{m_{pl}^2 R}{2} + \frac{\mu}{2} R^2 \right] \\
 = \int d^4x \sqrt{-g} & \left[ \frac{m_{pl}^2 R}{2} \left( 1 + \frac{2\mu R}{m_{pl}^2} \right) - \frac{\mu \phi^2}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{4}$$

と表したとき、 $f(\phi) = 1 + \frac{2\mu\phi}{m_{pl}^2}$  とおき、このような Einstein-Hilbert part にかかる関数を Non-minimal coupling function と呼ぶ。(ただし今  $R = \phi$ )

この作用は、metric に対して共形変換、

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad \text{where} \quad \Omega^2 = 1 + \frac{2\mu\phi}{m_{pl}^2} \tag{5}$$

を行って Jordan frame から Einstein frame に移ると、

$$\begin{aligned}
 S_E = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} & \left[ \frac{m_{pl}^2 \tilde{R}}{2} - \frac{\tilde{g}^{\mu\nu}}{2} (\tilde{\partial}_\mu \psi)(\tilde{\partial}_\nu \psi) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} e^{-2\alpha\psi} (\tilde{\partial}_\mu \chi)(\tilde{\partial}_\nu \chi) - V \right]
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 V = \frac{m_{pl}^2 (e^{2\alpha\psi} - 1)^2}{8e^{4\alpha\psi} \mu} + \frac{1}{2} m_\chi^2 e^{-4\alpha\psi} \chi^2 \\
 e^{2\alpha\psi} = 1 + \frac{2\mu\phi}{m_{pl}^2}
 \end{aligned} \tag{7}$$

となる。この Einstein frame での作用において  $\chi$  の運動項は  $e^{-2\alpha\psi}$  を含む。このような運動項を Non-canonical kinetic term と呼ぶ。また、

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{m_{pl}^2}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{G}_{IJ} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^I \partial_\nu \phi^J - V(\phi^I) \right] \tag{8}$$

と表したときの  $\tilde{G}_{IJ}$  は field space における metric である。field space 上での幾何学は、今目標としている Non-Gaussianity を計算する際に重要な役割を果たす。

## 3 $\delta N$ -formalism

目標としている曲率ゆらぎ  $\zeta$  の 3 点関数を計算するにあたって、今回は  $\delta N$ -formalism と呼ばれる手法を用いる。これは曲率ゆらぎ  $\zeta$  を e-folding :  $N$  とスカラー場を用いて、

$$\zeta \sim \delta N = \partial_I N \delta\phi^I + \frac{1}{2!} \partial_I \partial_J N \delta\phi^I \delta\phi^J + \dots \tag{9}$$

のように展開するものである ( $\partial_I$  などは場  $\phi^I$  での微分を表す)。この手法を用いることでゆらぎの 2 点関数、3 点関数は e-folding とその場での微分で与えられる。

しかし前節で議論したような運動項が canonical に規格化されていないような場合においては、この定式化は field space が非自明な計量を持つことを反映したような修正を受ける。

## 4 Bispectrum in curved field space

運動項が canonical に規格化されず、field space が非自明な計量を持つ場合、 $\zeta$  の展開式 (10) は、

$$\zeta \sim (\mathcal{D}_I N) Q^I + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_I \mathcal{D}_J N) Q^I Q^J + \dots \quad (10)$$

のように変更される。ここで  $\mathcal{D}_I$  は field space 上の共変微分であり、field space 上のベクトルに対して  $\mathcal{D}_I A^J = \partial_I A^J + \Gamma_{IK}^J A^K$  によって定義される。またここでの Christoffel 記号  $\Gamma_{IK}^J$  は先ほどの field space 上の計量  $\tilde{G}_{IJ}$  を用いて計算できる。 $Q^I$  は、展開式 (10) を共変な形にするために導入されたものであり、

$$\begin{aligned} \delta\phi^I &= \left. \frac{d\phi^I}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2\phi^I}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=0} + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3\phi^I}{d\lambda^3} \right|_{\lambda=0} + \dots \\ \left. \frac{d\phi^I}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} &\equiv Q^I \\ \delta\phi^I &= Q^I - \frac{1}{2!} \Gamma_{JK}^I Q^J Q^K \\ &\quad + \frac{1}{3!} (\Gamma_{LM}^I \Gamma_{JK}^M - \Gamma_{JK,L}^I) Q^J Q^K Q^L + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

で定義される。実際の計算においては、leading order で  $\delta\phi^I$  は  $Q^I$  に一致するため、 $\delta\phi^I$  を用いた計算がそのまま流用できる。

(10) の展開式を 3 点関数の式 (1) あるいは (2) の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} \langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \zeta(\mathbf{k}_3) \rangle_* &= N_{,I} N_{,J} N_{,K} \langle Q^I(\mathbf{k}_1) Q^J(\mathbf{k}_2) Q^K(\mathbf{k}_3) \rangle_* \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_I \mathcal{D}_J N) N_{,K} N_{,L} \\ &\quad \times \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \langle Q^I(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) Q^K(\mathbf{k}_2) \rangle_* \langle Q^J(\mathbf{q}) Q^L(\mathbf{k}_3) \rangle_* \\ &\quad + \text{cyclic perms} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。詳細は省略するが、この式の右辺第一項からの寄与は Slow-roll parameter:  $\varepsilon$  を含むため、Slow-roll condition  $\varepsilon \ll 1$  を用いるとその寄与が無視できるほど小さいと言える。従って上式の第二項と (2) の右辺を比較することで、 $f_{NL}^{local}$  に対する最終的な表式、

$$f_{NL}^{local} = -\frac{5}{6} \frac{N_{,A} N_{,B} \mathcal{D}_A \mathcal{D}_B N}{(N_{,I} N_{,I})^2} \quad (13)$$

を得る。なお、作用中の全てのスカラー場の運動項が canonical に規格化されているような Multi-field inflation において  $f_{NL}^{local}$  は、

$$f_{NL}^{local} = -\frac{5}{6} \frac{N_{,A} N_{,B} N_{,AB}}{(N_{,I} N_{,I})^2} \quad (14)$$

で与えられる。(13) と (14) の違いは添字を縮約する際に用いている field space での計量が自明なものであるか否かと  $N$  の 2 階微分の因子が共変微分になっているか否か、という 2 点のみである

式 (13) によれば、 $e$ -folding  $N$ 、field space 上の計量  $\tilde{G}_{IJ}$  及びこれから計算される Christoffel 記号  $\Gamma_{JK}^I$  が得られれば、Non-Gaussianity  $f_{NL}^{local}$  は計算できることになる。

## 5 Conclusion

今回の発表では、Starobinsky inflation model にさらにスカラー場のセクターを追加したような Two-field inflation model における、曲率ゆらぎの Non-Gaussianity の計算方法を議論した。特にスカラー場の運動項が Canonical に規格化されていないような場合には、field space は非自明な計量を持ち、そのような場合に field space におけるや共変な表現を得るために共変微分や先に導入した  $Q^I$  が導入される。

今回は曲率ゆらぎ  $\zeta$  を  $e$ -folding  $N$  のスカラー場での微分で表す  $\delta N$ -formalism を用いた。今回考えたような場合には、 $N$  を展開する際のスカラー場での微分は field space 上での共変微分に置き換わる。

以上見てきたように、式 (13) に従って作用 (7) で与えられる inflation model について Non-Gaussianity  $f_{NL}^{local}$  を計算する準備は整った。これを数値的に計算し、評価することに関しては現在研究を進行中である。

## Reference

1. C.van de Bruck, L.E.Paduraru(2015), arXiv:1505.0172
2. D.Kaiser et al(2012), arXiv:1210.7487
3. J.Elliston et al(2012), arXiv:1208.601