インフレーション中の磁場生成

北脇 理帆 (神戸大学大学院 理学研究科)

Abstract

近年，観測によって様々な天体のもつ磁場が明らかになってきた．その中でも銀河間で観測された磁場は，数 nG の強度で数 Mpc ほどの非常に大きな波長を持っている．しかし，これまで波長の大きい磁場がどのように形成されたのかは明らかにされていない．
大きな波長をもつ磁場を説明するために，V.Demmozi et al.(2009) の内容を考察する．論文中で用いられた，インフレーション中では電磁場の結合定数が時間依存するというモデルから，現在 1Mpc の波長をもつ磁場の強度を再計算する．再計算の結果，強結合問題や反作用問題があるため 10^{-30}G ほどの強度になった．このモデルで大きな波長をもつ磁場の説明はできるが，再計算した現在での磁場の強度が観測値よりもたいへん小さくなるので，今後は更に磁場の強度が上がるようなモデルを考えていく必要がある．

1 Introduction

1.1 宇宙の磁場

近年，観測によって様々な天体のもつ磁場が明らかになっている．(T.Venumadhav et al. 2014)

表 1: 天体の磁場

	強度	波長の長さ
銀河・銀河団	数 μG	数 kpc
銀河間	数 nG	数 Mpc

銀河間の磁場が観測される以前は，銀河や銀河団のもつ数 kpc ほどの波長の磁場の起源に関して，十分初期に作られた小さな種磁場（惑星，恒星など）が銀河の差動回転や銀河同士の衝突によって増幅するというモデルで説明されてきた．しかし，このモデルでは差動回転の回転数などの性質の異なる天体が似た電磁場を持っていることなどが説明できないという問題がある．また，銀河間で波長の長い磁場が観測されたことにより，銀河間ではそもそも種となる磁場が存在しないということから，銀河間の磁場ではこのモデルが使えない．今日でも銀河間で観測されるような長い波長の磁場がどうやってできたのかは大きな謎であり，新たな磁場生成モデルが必要とされている．

1.2 インフレーション

宇宙初期の急激な加速膨張が起こった時代のことをインフレーションと呼ぶ．以下でインフレーションの性質を簡単に説明する．
インフレーション中の時空の計量は，

$$ds^2 = a(\eta)^2(-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j)$$

（FRW 計量）で，平坦な空間が一様等方的にスケール因子 $a(t)$ で膨張している．ただし，時間について共形時間 $dt^2 = a(\eta)^2 d\eta^2$ でとりなおしている．
GUT スケール [1] が成立していると考えられており，ハッブル定数は $H_I \simeq 10^{-6}[M_p]$（M_p:プランク質量 [2]）で，宇宙の温度 [3] は $T_f = \sqrt{M_p \cdot H_I} \sim 10^{16}[GeV]$ とほぼ一定の値である．
また，ハッブルパラメーの定義からインフレーション中の時刻 t で $a(t) \simeq a(t_i) \cdot \exp[H_I(t - t_i)]$（$t_i$：インフレーションの始まりの時刻）となるので，インフレーション中は $a(t)$ が時間とともに指数関数的に大きくなる．$a(t)$ の指数の部分はインフレーションが続いた時間に関係しており，

$$N \equiv \int_{t_i}^{t_f} H(t)dt$$

[1] 大統一理論が成立しているエネルギースケール．電磁相互作用，弱い相互作用，強い相互作用が統一される．GUT は grand unification theory の略．
[2] $M_p \sim 10^{19}$[GeV]
[3] 現在観測される放射の温度は $T_0 \simeq 2 \times 10^{-13}$[GeV]

（t_f:インフレーションの終わりの時刻）は e 数と呼ばれる．V.Demozzi et al.(2009) では $N = 75$ と仮定している．
また，$a(t)$ はインフレーションが終わる頃には宇宙は初期と比べてかなり大きく成長することがわかる．この急激な宇宙の膨張によって，波長が非常に大きく引き伸ばされる．

2 Model

本章では，磁場がインフレーション中の量子揺らぎ起源であり，インフレーション時の宇宙の急膨張で波長の小さな磁場を増幅すると想定する．現在 1[Mpc] の波長をもつ磁場の強度を再計算し，観測されている強度（$\sim$ nG）に達しているかを確認する．

2.1 時間依存する結合定数

インフレーション中は FRW 計量の成り立つ時空であり，電磁場の作用は，

$$S = -\frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x$$

である．インフレーション中では電磁場が共形不変なので，真空が保存している．そのため，電磁場の起源を考えるには従来の電磁場の共形不変性を取り除く必要がある．インフレーションが終われば元の電磁場の作用に戻るように注意して，インフレーション中の電磁場の作用を共形不変を破るような形に書き換える．

$$\boxed{S = -\frac{1}{4}\int\ f(\eta)^2 \cdot F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ \sqrt{-g}d^4x}$$

ここで，$f(\eta)$ は電磁場と他の粒子（例えば，フェルミオンなど）との相互作用の結合定数 $g_{em}(\eta)$ と，$f(\eta) = g_{em}(\eta)^{-1}$ という関係が成り立っている．インフレーションが終われば電磁場の共形不変性を戻すため，

$$\boxed{f(\eta) = \left(\frac{a(\eta)}{a_f}\right)^n}$$

とする．(a_f：インフレーションの終わりのスケール因子)

2.2 電磁場の量子化

インフレーション中の量子揺らぎ起源の電磁場の理解に向けて場の量子化を行い，最小作用の原理から導いた運動方程式の解を求める．

(1) 作用をベクトル場の形に書く．

$$S = \frac{1}{2}\int\ f(\eta)^2\ [\ A_i^{T\prime}A_i^{T\prime} + A_i^T\Delta A_i^T\ ]d^4x$$

ここで，ベクトル場 A^μ の空間成分を横波（添字 T）と縦波に分解 ($A_i = A_i^T + \partial_i\chi$) した．

(2) フーリエ変換
横波成分を極性ベクトル $\epsilon_i(\mathbf{x})$[4] を用いて 2 成分に分解してからフーリエ変換すると，

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=1,2}\int d\eta\int d^3k\ f(\eta)^2 \times [\ A_{\mathbf{k}}^{\sigma\prime}(\eta)A_{-\mathbf{k}}^{\sigma\prime}(\eta)\ - (k_i)^2A_{\mathbf{k}}^{\sigma}(\eta)A_{-\mathbf{k}}^{\sigma}(\eta)\ ]$$

(3) 量子化
$A_{\mathbf{k}}^\sigma(\eta)$ の共役な運動量 $\pi_{\mathbf{k}}^\sigma = f^2A_{-\mathbf{k}}^{\sigma\prime}$ を用いて量子化する．ただし，$[A_{\mathbf{k}}^\sigma, \pi_{\mathbf{k}'}^\rho] = i\delta^{\sigma\rho}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ という関係が成り立っている．(量子化条件)
$A_{\mathbf{k}}^\sigma$ は昇降演算子 [5] で $A_{\mathbf{k}}^\sigma(\eta) = u_{\mathbf{k}}(\eta)a_{\mathbf{k}}^\sigma + u_{\mathbf{k}}^*(\eta)a_{-\mathbf{k}}^{\sigma\dagger}$ ($u_{\mathbf{k}}(\eta)$ はモード関数．) と展開しておく．

$$S = \int d\eta\int d^3k\ f(\eta)^2\ \cdot\left[u_{\mathbf{k}}'u_{-\mathbf{k}}^{*\prime} - k^2u_{\mathbf{k}}u_{-\mathbf{k}}^*\right]$$

(4) 運動方程式
最小作用の原理より，$u_{-\mathbf{k}}^*$ について変分すると

$$\delta S = \int d\eta\int d^3k\left[-f^2u_{\mathbf{k}}'' - 2ff'u_{\mathbf{k}}' - f^2k^2u_{\mathbf{k}}\right]\delta u_{-\mathbf{k}}^*$$

運動方程式

$$\boxed{u_{\mathbf{k}}'' + 2\frac{f'}{f}u_{\mathbf{k}}' + k^2u_{\mathbf{k}} = 0}$$

が得られる．
量子化条件より，

$$\langle 0|[A_{\mathbf{k}}^\sigma, \pi_{\mathbf{k}}^\sigma]|0\rangle = 2i \Leftrightarrow u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}^{*\prime} - u_{\mathbf{k}}'u_{\mathbf{k}}^* = \frac{i}{f^2}$$

である.(規格化条件)

[4] $k_i\epsilon_i^\sigma(\mathbf{k}) = 0\quad,\ \epsilon_i^\sigma(-\mathbf{k})\epsilon_i^\rho(\mathbf{k}) = \delta^{\sigma\rho}$
[5] $[a_{\mathbf{k}}^\sigma, a_{\mathbf{k}'}^{\rho\dagger}] = \delta^{\sigma\rho}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), a_{\mathbf{k}}^\sigma|0\rangle = 0$

2.3 運動方程式の解

インフレーション初期に生じた小さな電磁場の波長が，インフレーションがすすむにつれてホライズンスケール[6] 以上の大きさへと成長していく．

(1) 波長が小さいとき ($k^2 \gg (f/f')^2$)
運動方程式は

$$u''_{\mathbf{k}} + k^2 u_{\mathbf{k}} = 0$$

と近似できる．
正の振動解を採用して，

$$u_{\mathbf{k}}(\eta) \simeq D \cdot e^{-ik\eta}$$

（D は積分定数）である．規格化条件より，

$$D^2 = \frac{1}{f^2 \cdot 2k}$$

これを用いて，求める解は

$$u_{\mathbf{k}}(\eta) \simeq \frac{1}{f\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}$$

である．

(2) 波長が大きいとき（$k^2 \ll (f'/f)^2$）
運動方程式は

$$u''_{\mathbf{k}} + 2\frac{f'}{f} u'_{\mathbf{k}} = 0$$

と近似できる．
これを解くと，

$$u_{\mathbf{k}}(\eta) \simeq C_1 + C_2 a(\eta)^{-2n-1}$$

（C_1，C_2 は積分定数.）
$n > -1/2$ のとき第一項が優勢になり，$n < -1/2$ のとき第二項が優勢になる．

$\eta = \eta_k$ で波長がホライズンスケールになるとすると，境界条件から積分定数が決まり，運動方程式の解を得ることができる．

[6] 宇宙のホライズン：$r_H \equiv 1/H$

3 Calculation

3.1 $n > -1/2$ のとき

モード関数 $u_{\mathbf{k}}(\eta)$ は，

$$u_{\mathbf{k}} \simeq \frac{1}{f_k\sqrt{2k}} \quad (\because \lambda = \frac{1}{k} = c\eta_k \Leftrightarrow k\eta_k = 1)$$

磁場について，

$$\langle 0|B_i(\mathbf{x},\eta)B^i(0,\eta)|0\rangle = \int \frac{dk}{k} \int d\theta d\phi \sin\theta \frac{|u_{\mathbf{k}}|^2\ k^5}{4a^4\pi^3}\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

磁場のパワースペクトル $\delta_B(\eta, k)$ は，

$$B^2 = \langle 0|B_i(0,\eta)B^i(0,\eta)|0\rangle \equiv \int \frac{dk}{k} \delta_B^2(\eta, k)$$

なので，

$$\delta_B^2(\eta, k) = \frac{|u_{\mathbf{k}}|^2\ k^5}{a^4\pi^2}$$

$n > -\frac{1}{2}$ のときの $\eta = \eta_f$ での磁場のパワースペクトルは，

$$\delta_B(\eta_f, k) \simeq 10^{46}[\mathrm{G}] \cdot \left[\frac{a_f}{a_0}\lambda_{ph}(\eta_0)H_I\right]^{n-2}$$

ただし，$\lambda_{ph}(\eta)$ は波数 k に対応する固有波長である．

ここで，生成した電磁場がインフレーションを阻害することのないように気をつけなければならない（反作用問題）．電磁場のエネルギー密度は

$$\rho_{em}(\eta) = \frac{f^2}{2\pi^2 a^4} \int_{a_i H_I}^{a_f H_I} dk\ k^2 \left[\ |u'_{\mathbf{k}}|^2 + k^2 |u_{\mathbf{k}}|^2\ \right]$$

となるので，$\eta = \eta_f$ のときのエネルギー密度は

$$\begin{aligned}
\rho_{em}(\eta_f) &\simeq \frac{f^2}{4\pi^2 a^4}(a_f H_I)^{2n} \int_{a_i H_I}^{a_f H_I} dk\ k^{-2n+3} \\
&= \frac{1}{8\pi^2} H_I^4 \times \begin{cases} \dfrac{1}{2-n} & (n < 2) \\ 2 \cdot \ln\left(\dfrac{a_f}{a_i}\right) & (n = 2) \\ \dfrac{1}{n-2}\left(\dfrac{a_f}{a_i}\right)^{2(n-2)} & (n > 2) \end{cases}
\end{aligned}$$

である．電磁場の反作用から課せられる条件は $8\pi G\rho_{em}/3 < H_I^2$ であるので，ここから n に課せられる条件を求めると $-0.5 < n < 2.2$ である．

しかし，$\eta = \eta_i$ のときの結合定数に注目すると，$f(\eta_i) = \left(e^{-75}\right)^n$ より，$n > 0$ のとき $f \ll 1$ である．つまり，結合定数は $g_{em}(\eta_i) = f(\eta_i)^{-1} \gg 1$ となる．$n > 0$ ではインフレーション初期に結合定数が非常に大きくなるため，最初に結合定数を摂動で導入したことに反してしまう（強結合問題）．これより $-1/2 < n < 0$ である．

また，インフレーション後の再加熱が $\eta = \eta_f$ の直後に一瞬で起きたとすると，

$$\frac{a_0}{a_f} \simeq \frac{a_0}{a_R} \simeq \frac{T_R}{T_0} \simeq \frac{\sqrt{M_p H_I}}{T_0} \sim 10^{29}$$

(a_R, T_R:再加熱のときのスケール因子，温度) というスケール因子の比が得られる．
したがって，$\delta_B(\eta) \propto a^{-2}$ なので，現在 1[Mpc] の固有波長をもつ磁場の強度を見積もると，$\delta_B(\eta_0) \sim 10^{-57}$[G] となる．

3.2 $n < -1/2$ のとき

モード関数 $u_{\mathbf{k}}(\eta)$ は，

$$u_{\mathbf{k}}(\eta) \simeq \frac{1}{f_k\sqrt{2k}}\left(\frac{H_I a(\eta)}{k}\right)^{-2n-1}$$
$$(\because k\eta_k = 1\ ,\ a_k = \frac{k}{H_I})$$

である．したがって，$\eta = \eta_f$ のときの磁場のパワースペクトルは

$$\delta_B(\eta_f, k) \simeq 10^{46}[\mathrm{G}] \cdot (\lambda_{ph}(\eta_f) H_I)^{-n-3}$$

となる．$|u_{\mathbf{k}}|^2 \propto a^{-4n-2}$，$|u'_{\mathbf{k}}|^2 \propto a^{-4n} H_I^2$ なので，電磁場のエネルギー密度は $\eta = \eta_f$ で $|u'_{\mathbf{k}}|^2$ の項が優勢になる．$\eta = \eta_f$ での電磁場のエネルギー密度は

$$\begin{aligned}\rho_{em}(\eta_f) &\simeq \frac{1}{2\pi^2 a_f^4}\int_{a_i H_I}^{a_f H_I} dk\ k^2 |u'_{\mathbf{k}}|^2 \\ &= \frac{4n^2+4n+1}{8\pi^2} H_I^4 \\ &\times \begin{cases} \dfrac{1}{n+2} & (n > -2) \\ 2 \cdot \ln\left(\dfrac{a_f}{a_i}\right) & (n = -2) \\ -\dfrac{1}{n-2}\left(\dfrac{a_f}{a_i}\right)^{-2(n+2)} & (n < -2) \end{cases}\end{aligned}$$

となる．
$n > -1/2$ の場合と同様に電磁場の反作用を考慮すると，n の条件は $-2.2 < n < -0.5$ である．これより，現在 1[Mpc] の固有波長をもつ磁場の強度を見積もると，$\delta_B(\eta_0) \sim 10^{-30}$[G] となる．

4 Conclusion

インフレーション起源の磁場モデルで実際に観測されているほどの大きな波長をもつ磁場（Mpc 程度の波長で nG 程度の強度）を説明できるか確かめてみた．このモデルで長い波長の磁場を作る問題はクリアできるが，どの程度の強度の磁場になるのかを確認する必要があった．強結合問題・反作用問題を避けて現在 1[Mpc] の固有波長をもつ磁場の強度を見積もった結果，

(1) $n > -\frac{1}{2}$ のとき

$$\delta_B(\eta_0) \sim 10^{-57}[\mathrm{G}]$$

(2) $n < -\frac{1}{2}$ のとき

$$\delta_B(\eta_0) \sim 10^{-30}[\mathrm{G}]$$

となり，このモデルでは 10^{-30}[G] 程度の磁場なら説明できることがわかった．観測されている磁場を説明するには，ここからさらに磁場の強度を上げる必要がある．形成した電磁場のインフレーションに対する反作用が小さいモデル・再加熱の温度が低いモデル・他の電磁場の共形不変を破るモデル等を考えて検証していくことが今後の課題である．

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号：YITP-W-15-04) 及び国立天文台，神戸大学からのご支援に感謝いたします。

Reference

V.Demmozi, V.Mukhanov & H.Rubinstein 2009, JCAP

D.Kanno, J.Soda & M.Watanabe 2009, JCAP

T.Venumadhav, A.OKlopčić, V.Gluscevic, A.Mishra & C.M.Hirata 2014, ArXiv e-prints