Palatini 形式の Born-Infeld gravity と重力崩壊

駒田　翔 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

近年、さまざまな修正重力理論が精力的に研究されてきている。本稿ではそのうちの一つである Born-Infeld gravity について解説しその特徴的な性質を一様等方ダスト宇宙とブラックホール形成への応用を通して考察する

1 Introduction

近年、一般相対性理論の持つ理論的・観測的な課題を背景に数多くの一般相対性理論を越えた理論が提案され、その性質が詳しく研究されてきている。一般相対性理論は、重力を記述する基礎理論であると考えられており、天文学・宇宙物理学の基本的な道具として現在までに多くの成功を収めてきた。例を挙げると、太陽系内における惑星軌道の Newton 力学からの予言への補正や、重力場において光線の軌道が曲げられる重力レンズ効果などへの定量的な予言があり、それらは高い精度で観測・確認されている。また、現代の標準的な宇宙論は、一般相対性理論に基づき、一様・等方的な宇宙の振る舞いを決定するフリードマン方程式によって記述されている。

このように大きな成功を収めている一般相対性理論であるが、いくつかの問題が存在する。観測的問題の一つには、宇宙の加速膨張の問題がある。様々な観測によって、現在の宇宙は加速膨張していることが分かっており、また、宇宙初期にはインフレーションと呼ばれる急激な宇宙の膨張があったと考えられている。これらの問題は、通常の物質のみが宇宙に存在すると考えた場合、一般相対性理論では説明することができない.

上記の問題に加えて、理論的・数学的な問題もある。一般相対性理論では一般的な条件の下で時空特異点と呼ばれる構造が出現することが証明されている。この特異点では、物理量の幾つかが発散し、理論として破綻をきたす。特異点は、宇宙初期や black hole と呼ばれる強重力場の天体の内部や、その形成過程で出現し得ることが知られており、単なる数学的な問題として無視することはできない。

これらのような問題に対して、一般相対性理論を修正・変形するアプローチが知られている。これを修正重力理論と呼び、通常の物質のもとでも、加速膨張やインフレーションを説明できることが知られている。修正重力理論は、一般相対性理論の拡張であるので、多岐にわたる指導原理の下、幾つもの模型が存在する。本稿ではその中の１つである Born-Infeld gravity について解説する。

2 Palatini 形式

ここでは、上述の理論を定義するのに必要な重力理論の定式化である Palatini 形式について解説する。通常、一般相対性理論は計量を基本自由度に持ち、その２階微分方程式によってそのダイナミクスが記述される。これに対し、Palatini 形式は、基本自由度として計量と接続を独立に与え、それらの１階微分方程式によってそのダイナミクスを記述することで一般相対性理論を定式化する。このことを具体的に見てみる。Palatini 形式での一般相対性理論の作用は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
S[g_{\mu\nu},\ \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}] = \quad & \tfrac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma)+\Lambda\right] \\
& +S_{matter}(g_{\mu\nu},\ \Psi) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで $-g$ は計量の行列式であり、$R_{\mu\nu}(\Gamma)$ は、曲率が独立な接続から直接得られている事を表す。また $\kappa=\sqrt{8\pi G}$ である。計量と接続が独立であることに注意して、変分を取ると方程式が得られる。、

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=0 \qquad (2)$$

$$\nabla_{\alpha}[-g]^{1/2}g_{\mu\nu}=0 \qquad (3)$$

ここで、２番目の方程式を解くと、標準的な接続である Levi-Civita 接続が得られる。このようにして、一般相対性理論は等価な二つの方法で定式化できる。

しかし、これは一般相対性理論に特有の性質であり、これを越えて重力理論を考察した場合、二つの定式化はそれぞれ異なる理論を与える。これは、次に解説する Born-Infelt gravity でも同様である。

3 Born-Infeld gravity

本稿で考察する Born-Infeld gravity は以下の作用で与えられる。

$$S = \frac{1}{\kappa^2 b}\int d^4x \left\{\sqrt{|\det(g_{\mu\nu}+bR_{\mu\nu})|} - \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}\right\} + S_{\mathrm{matter}}\,. \tag{4}$$

ここで、b は新たに導入された定数である。

この形の作用は、元々、電磁気学の非線形拡張理論として Born とＩｎｆｅｌｄ [1] によって考察された。Born-Infeld 電磁気理論は、電子の自己エネルギーなどが発散せず、有限になるような性質を持つ。同様の効果を期待して重力における類似した理論が Deser と Gibbons[2] によって考察された。Deser と Gibbons の理論は通常の計量の自由度のみの定式化であったが、これを、Palatini 形式で考察することもできる [3]。上述の作用はその中で最も単純な形のものである。また、上述の作用は Eddington-inspired Born-Infeld gravity ともしばしば呼ばれる。これは元々Eddington によるさらに別の一般相対性理論の定式化 [4] を Born-Infeld 型の作用に拡張したもの [5] であるとも思えるからである。

さて、この Born-Infeld gravity は上述したような、有限の物理量を与える理論になっているのだろうか。特に、特異点を持たないような理論になっているであろうか。次節以降で、この問題について、FLRW ダスト宇宙や、ブラックホール形成について考察することで、確かに特異点が回避されている事を見る。

4 FLRW 宇宙とブラックホール形成

一様等方で平坦な宇宙の、計量についての仮定は以下のように与えられる。

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \sum_{i=1,2,3}\left(dx^i\right)^2\,, \tag{5}$$

$$\Gamma^t_{tt} = A(t)\,,\quad \Gamma^t_{ij} = a(t)^2 B(t)\delta ij \tag{6}$$

$$\Gamma^i_{jt} = \Gamma^i_{tj} = C(t)\delta^i{}_j\,. \tag{7}$$

ここでは、Palatini 形式で考えているので、１つ目の計量に関する式だけでなく、接続についての２つ目の式も必要である。一様なダスト宇宙を仮定して、この仮定を上述の方程式に代入すると

$$A = C - H = -\frac{3}{4}b\kappa^2 H\rho\left(1+b\kappa^2\rho\right)^{-1}\,, \tag{8}$$

$$B = H + \frac{b\kappa^2}{4}H\rho\,, \tag{9}$$

$$C = H - \frac{3}{4}b\kappa^2 H\rho\left(1+b\kappa^2\rho\right)^{-1}\,, \tag{10}$$

$$b\kappa^2\rho = \left\{1 + b\left(\dot H + 3H^2 + \frac{b\kappa^2}{2}\dot H\rho\right)\right\}^2 - 1\,. \tag{11}$$

となる。ここで、ρ はダストの密度である。これを組み合わせて、解くことでこの時空の振る舞いがわかる。その結果は一般相対性理論と著しく異なるものになる。この宇宙は初期特異点を持たず、スケールファクターは有限の密度で収縮から反跳に転じる。その密度は、

$$\rho_c = \begin{cases} \frac{8}{3b\kappa^2} & \text{when } b\kappa^2\rho_0 \gg 1 \\ \frac{64}{9b\kappa^2} & \text{when } b\kappa^2\rho_0 \ll 1 \end{cases}\,. \tag{12}$$

となる。ここで ρ_0 は、初期密度である。

この、有限の大きさで反跳するダスト宇宙を用いて重力崩壊を考えることができる。ある有限の大きさの球対称ダスト球を考える。この内部は、先述の一様等方ダスト宇宙で記述することができる。これを、外側の時空と接続することで、球対称ダストの崩壊と反跳を考えることができる。この崩壊では、ダスト球は１点まで崩壊せず、有限の大きさで反跳する。その大きさを、形成されるブラックホールの

Schwartzschild 半径と比較することで、ダスト崩壊によってブラックホールができるかどうかを判定できる。

これを実行するとブラックホールが形成されるには、次のブラックホール質量に対する条件を満たす必要があると分かる。

$$M^2 > \frac{27\pi b}{4\kappa^4} \tag{13}$$

つまり、質量がある一定より小さいブラックホールは形成されない。こうして、特異点回避やブラックホール形成の制限など Born-Infeld gravity 特有の現象を見ることができた。

5 まとめ

修正重力理論の一種である Born-Infeld gravity とそれが持つ特徴的な性質のついて議論してきた。Born-Infeld gravity は一様等方宇宙において初期特異点を持たず、ブラックホールの形成に制限を与えることがわかった。しかしながら、まだ理解が十分でない点もいくつかある。まず、このブラックホール形成において、ダストはブラックホールが形成されようがされまいが必ず反跳する。これは一般相対性理論ではありえない事であって、まだその後のダストの挙動についてはよく分かっていない。そもそも、ダスト球の内部を一様と考えるのには限界があり、この近似が成り立たない場合、どのようなことが起きるのかもよく分かっていない。修正重力理論の効果が大きく現れる強重力場での現象の理解はその理論の特徴をよりよく理解するために不可欠である。これらの課題の解決を含めた、Born-Infeld gravit の理解の進展が必要である。

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号 : YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。

Reference

[1] 1 M. Born and L. Infeld, Proc. Roy. Soc. Lond. A **144** (1934) 425.

[2] 2 S. Deser and G. W. Gibbons, Class. Quant. Grav. **15** (1998) L35 [hep-th/9803049].

[3] 3 D. N. Vollick, Phys. Rev. D **69** (2004) 064030 [gr-qc/0309101].

[4] 4 A. S. Eddington, “The mathematical theory of relativity”, (Cambridge University Press, Cambridge, England. 1924).

[5] 5 M. Banados, Phys. Rev. D **77** (2008) 123534 [arXiv:0801.4103 [hep-th]];
M. Banados and P. G. Ferreira, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 011101 [arXiv:1006.1769 [astro-ph.CO]];
J. H. C. Scargill, M. Banados and P. G. Ferreira, Phys. Rev. D **86** (2012) 103533 [arXiv:1210.1521 [astro-ph.CO]].