# ケーラー多様体の量子変形

原 健太郎 (東京理科大学 理学部数学科)

## Abstract

ニュートンの運動方程式 $F = m\ddot{a}$ には座標が登場するが、自然界には特別な座標はない。座標に依存しない力学としてはハミルトン力学がある。また量子力学は当初、波動力学や行列力学として誕生したが次第にハミルトン系のポアソン構造の量子化と認識されるようになった。今回は物理学の量子化と幾何学の関係について考える。

## 1 接束と物理学

多様体 $M$ に対して接束 $TM$ が定義されるが、物理学の問題はこの上の問題と考えることができる。具体的にはハミルトン方程式

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

に対しハミルトンベクトル場

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

が相当する。

## 2 斜交多様体の変形量子化

斜交多様体（シンプレクティック多様体）$M$ の定義は

$$^{\exists}\omega \in \wedge^2 \Gamma T^* M - \{0\}\ s.t.\ d\omega = 0$$

の存在である。$dx \wedge dp \in \wedge^2 \Gamma \{T^* (TM)\}$ は条件を満たす斜交形式となる。つまり物理学の量子化は斜交多様体の変形量子化によってなされる。変形量子化とは

$$* : C^\infty (M) [[\hbar]] \times C^\infty (M) [[\hbar]] \to C^\infty (M) [[\hbar]]$$

であり、

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

を満たす。実際にはより広い分類であるポアソン多様体の変形量子化の存在が示されている。ちなみに斜交多様体のポアソン構造は $\{f, g\} = X_f g, (\omega (X_f, \cdot) := df)$ で定まる。

## 3 ケーラー多様体の変数分離変形量子化

とは言え実際に変形量子化=非可換積を求めることは困難であり、より強い制約の範囲内で非可換積を求めることが考えられる。幾何学において斜交構造を持つ多様体としてはケーラー多様体がある。ケーラー多様体は当初エルミート接続の捻れが 0 になる複素多様体として考えられていたが、斜交多様体にもなる。斜交形式は $\omega (X, Y) := g (X, JY)$ である。ケーラー多様体の場合は変数分離変形量子化という量子化が存在し、一部の係数を算出するアルゴリズムが存在する。$f * g := A_f g, A_f = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n A_n, A_n = a_{n,\alpha} (f) \prod_i^n \left(g^{\bar{i}l}\partial_l\right)^{\alpha_i}, \Phi$ : ケーラーポテンシャルのとき

$$[A_n, \partial_{\bar{l}} \Phi] = [\partial_{\bar{l}}, A_{n-1}]$$

が成り立つ。

## 4 局所対称ケーラー多様体の変数分離変形量子化

より強い制約として局所対称性がある。局所対称性はリーマン多様体上に定義されており $\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma}{}^\lambda = 0$ が条件である。対称空間は局所対称性を持つ。この条件の下に非可換積の係数の間に漸化式を作ることができる。

## 5 複素射影空間の変数分離変形量子化

ユークリッド空間にはモイヤル積が定義されているので、比較的素朴な局所対称ケーラー多様体は複素射影空間と複素双曲空間である。複素射影空間においてはシンプルな漸化式が存在し、Karabegov の方法で求めた $L_{z^{\bar{L}}}$ とも一致する。

## Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号：YITP-W-15-04 ) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。

## Reference

A. V. Karabegov, 1996,“Deformation quantizations with separation of variables on a Kahler manifold,” Commun. Math. Phys. **180**, 745 (1996) [arXiv:hep-th/9508013].

A. Sako, T. Suzuki and H. Umetsu, “Explicit Formulas for Noncommutative Deformations of $CP^N$ and $CH^N$,” J. Math. Phys. **53**, 073502 (2012) [arXiv:1204.4030 [math-ph]].

著者 D, 著者 E, & 著者 F 2015, 発行元 3