Bianchi I 型時空での Einstein–Weyl 重力の摂動運動方程式

古谷 有 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

Bianchi I 型宇宙を背景時空として Einstein–Weyl 重力理論における重力線形摂動の運動方程式を導く過程、及び現状での考察について報告する。

1 導入

Einstein の一般相対論は、太陽系のような天文力学的スケールかつ重力場があまり強くない状況において観測的に検証されているが、もっと極端な状況では、宇宙の初期特異点や量子論的な紫外発散などの理論的問題があることが知られており、そういった問題がなく、かつ既存の実験事実と矛盾のない理論の確立が求められている。

重力の強い状況での修正を期待するのであれば、Lagrange 関数 L に Riemann 曲率の非線形項の補正を含む高次曲率重力を検討するのが自然である。過去には $f(R)$ 重力などがよく調べられてきたが、Weyl 曲率テンソルを含む理論についてはあまり研究が進んでいるとはいえない。本研究で着目するのは、その種のもっとも簡素な理論である Einstein–Weyl 重力理論（以下 EW 重力と呼ぶ）である。

EW 重力の Lagrange 関数は、R を Ricci スカラー、$C_{\mu\nu\rho\sigma}$ を Weyl テンソル、γ を長さの 2 乗の次元を持つ定数として、

$$L = \frac{1}{2}\,R - \frac{\gamma}{4}\,C_{\mu\nu\rho\sigma}\,C^{\mu\nu\rho\sigma}$$

という形で与えられる。ただしここで、またこれ以降、$c = 8\pi G = \hbar = 1$ とする自然単位系を用いる。この理論の運動方程式は、$T_{\mu\nu}$ をエネルギー運動量テンソルとして

$$G_{\mu\nu} - \gamma\,B_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

と書かれる。ここで

$$B_{\mu\nu} \equiv 2\nabla^{\rho}\nabla^{\sigma}C_{\mu\rho\nu\sigma} + R^{\rho\sigma}\,C_{\mu\rho\nu\sigma}$$

は Bach テンソルと呼ばれる EW 重力の補正項である。Bach テンソルが 4 階微分を含むことから分かるように、EW 重力には一般相対論には存在しない動的自由度が含まれ、3 次元テンソルとしての性質を持つ。

このような理論での宇宙論的な摂動を考察することは、理論自体の妥当性を検証するために有用である。過去にはインフレーション中の摂動の古典的時間発展 (Deruelle et al. 2011) およびテンソル量子揺らぎからの原始背景重力波の生成などが調べられた (Clunan & Sasaki 2010; Deruelle et al. 2012)。

これらは一様等方な FLRW 宇宙を背景に選んで調べられたが、背景空間の非等方性を考慮に入れた拡張を行うことが一つの可能性として考えられる。そのような方法の開拓は、インフレーションによる等方化が進行するより前の初期宇宙を考えるために必要とされることでもあり、また非等方性と Weyl 曲率の間にある不可分の関係を考えれば、EW 重力を検証するための強力な手段になると期待される。

本講演では、具体的に非等方性を持つ背景時空として Bianchi I 型宇宙を考える。Bianchi I 宇宙でのゲージ不変摂動論は近年 Pereira らによって開拓されており (Pereira et al. 2007)、それを一般相対論から EW 重力へ拡張することが我々の目標である。その最も基礎となる Bach テンソルの線型摂動を導出する計算の現状と、性質に関する考察、および今後の展望について報告する。

2 定義

非等方性を持つ時空である Bianchi I 型の計量は次のようになる。

$$g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = e^{2\alpha(\eta)}[-d\eta^2 + \gamma_{ij}(\eta)dx^i dx^j],$$

$$\gamma_{ij} = e^{2\beta_i(\eta)}\delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{3}\beta_i(\eta) = 0.$$

ここで γ_{ij} は共形時間に依存する。また β_i の添え字の i はテンソルの足ではない。

空間の非等方性を表すシアーテンソルが

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{2}\gamma'_{ij} = \beta'_i\gamma_{ij}$$

で定義される。ここでプライム $'$ は共形時間での微分を表す。

3 次元空間上のテンソルの足の上下は γ_{ij} で定義する。また、

$$\sigma^i{}_i = 0$$

である。

スカラー・ベクトル・テンソル分解された一般的な摂動計量は、Pereira らによるとゲージ不変変数 $\{\Phi, \Psi, \Phi_i, E_{ij}\}$ を用いて、

$$(g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu$$
$$= e^{2\alpha}[-(1+2\Phi)d\eta^2 + 2\Phi_i dx^i d\eta + (\gamma_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j]$$

$$h_{ij} = -2(\gamma_{ij} + \Sigma_{ij})\Psi + 2E_{ij},$$
$$\Sigma_{ij} \equiv \frac{\sigma_{ij}}{\mathcal{H}}, \quad \mathcal{H} \equiv \alpha'$$

と表される。ここで、

$$\partial^i\Phi_i = 0, \ \partial^i E_{ij} = 0$$

である。$\delta G^\mu{}_\nu$ については Pereira らによって求められている。

3 Bach テンソルの摂動計算・結果

現時点では、Bianchi I 時空における Weyl テンソルの摂動 $\delta C^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$ の導出と、Bach テンソルの摂動 $\delta B^\mu{}_\nu$ を Weyl テンソルの摂動で表すことが出来た。よって、前者を後者に代入することにより Bach テンソルの摂動をゲージ不変変数を用いて表すことが出来る。

背景が Bianchi I 型宇宙の Bach テンソルの摂動は項の数が多く繁雑になるため、特徴的な量である $\{\Phi, \Psi, \Phi_i, E_{ij}\}$ の時間微分の最高次にのみ注目すると、

$$\begin{aligned}
\delta B^0{}_0 &\supset \sigma^j{}_i(\delta C^{0i}{}_{0j})', \ \ \partial_i\partial^j\delta C^{0i}{}_{0j} \\
&\supset E^{i\prime\prime\prime}_{\ j}, \Phi''_i, \Phi'', \Psi''' \\
\delta B^0{}_i &\supset \partial_j(\delta C^{0j}{}_{0i})', \ \ \sigma_{ij}\partial_k\delta C^{0j}{}_{0k} \\
&\supset E^{i\prime\prime}_{\ j}, \Phi''_i, \Phi'', \Psi''' \\
\delta B^i{}_j &\supset (\delta C^{0i}{}_{0j})'', \sigma^k{}_j(\delta C^{0i}{}_{0k}) \\
&\supset E^{i\prime\prime\prime\prime}_{\ j}, \Phi'''_i, \Phi''', \Psi''''
\end{aligned}$$

となる。ここで係数、スケール因子、空間微分、シアーについては省略した。これに対し、FLRW 宇宙での Bach テンソルの摂動はすでに Deruelle らにより求められており、同じく時間微分の最高次にのみ着目すると、δB_{00} には時間微分を含む項は存在せず、$(0i), (ij)$ 成分は

$$\begin{aligned}
\delta B^0{}_j &\supset \Phi', \ \Psi' \\
\delta B^i{}_j &\supset \Phi'', \ \Psi'', \ \Phi'_i
\end{aligned}$$

となる（同じく係数、スケール因子、空間微分を省略)。両者を比べると一様等方な背景の場合に比べて非等方な背景時空では微分の階数が上がることがわかる。

このように、等方な背景時空と非等方な背景時空における Bach テンソルの摂動の重要な差異は、非等方な背景時空にシアーテンソルが現れることにより、$\sigma^j{}_i(\delta C^{0i}{}_{0j})'$ などの等方な時空では消えてしまう項が値を持つことにある。

4 今後の展望

背景時空が Bianchi I 型の Bach テンソルは含む項の数が多いため、そのままでは物理的な意味を捉えることが難しい。そのため実際に応用する場合には状況を限定し、もしくは簡単化されたものを扱うことになるだろう。例えばシアーテンソルと $h^i{}_j$ の時間変化の大小関係に着目し、シアーテンソルを微小量として運動方程式のシアーテンソルに対する線形近似を行う。この場合は現在の概ね等方的な宇宙に対応する。あるいはシアーテンソルが非常に大きい値を持つとしてシアーテンソルの 0 次を無視し、高

階の微分を減らすことも考えられる。この場合はインフレーション以前の宇宙などに対応すると考えられる。

今回のゲージ不変変数の取り方では摂動方程式をスカラー、ベクトル、テンソル部分に分離することが出来ないと思われるため、別の取り方を検討する余地があるかもしれない。また、スカラー自由度は 1 つであるはずなので Φ と Ψ は特定の組み合わせでのみ現れるはずであり、その組み合わせも見出したい。

本研究は、例えばインフレーションによる宇宙の等方化過程への EW 重力による影響を調べる場合に必要となる。等方化過程については Wald の「宇宙無毛定理」が知られているが、重力理論の修正により等方化過程が修正される可能性がある。Weyl テンソルを含む重力理論の非等方性に関する先行研究として、Lagrange 関数が $L = R + a_1 C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} + a_2 R^2$ の重力理論における数値計算では、初期条件によって宇宙が等方化もしくは再収縮するという結果が出ているが (Berkin 1990)、同じ重力理論において非等方性を保ったまま指数関数的に膨張するという Bianchi 型時空の厳密解も発見されており (Barrow & Hervik 2006)、より一般の結論を得るためには解析的な手法で非等方性の進化を追うことが望ましい。そこで摂動的考察が有用になることが期待される。特に、Bach テンソルは Ricci テンソルが計量に比例する Einstein 空間では値を持たないという性質をもつため、一般相対論で Einstein 空間の場合の厳密解は EW 重力でも厳密解となる。そのような時空に限定すると背景の Bach テンソルは消え、摂動の影響のみが重要になる。例えば宇宙項によって非等方宇宙から等方宇宙へ向かう Kasner–de Sitter 解は、Einstein 空間に含まれるので、背景の Bach テンソルを考慮する必要がなく摂動の影響が考察しやすい。そのため等方化過程への影響や解の安定性の考察に適していると考えられる。

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号：YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。

Reference

N. Deruelle et al., J. Cosmol. Astropart. Phys. **1103** (2011) 040.

T. Clunan & M. Sasaki, Class. Quant. Grav. **27** (2010) 165014.

N. Deruelle et al., J. High Energy Phys. **1209** (2012) 009.

T. Pereira et al., J. Cosmol. Astropart. Phys. **0709** (2007) 006.

J. Barrow & S. Hervik, Phys. Rev. D **23** (2006) 023007.

A. Berkin, Phys. Rev. D **42** (1990) 1016.