Kerr 時空上における波動光学とブラックホールシャドウ

野田 宗佑 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

波動光学的にブラックホールシャドウを描く方法を考える。そのために Kerr ブラックホールを散乱体とした波の散乱の Green 関数を計算する。得られた Green 関数を用いて、観測者の天球面での散乱波の干渉パターンとそれを 2 次元フーリエ変換したイメージについて紹介する。

1 Over View

本研究で行うことを図で説明する。ソースは点源単色とし、波が Kerr ブラックホールに散乱される状況を考える。散乱波の 2 次元 Fourier 変換することによってソースのイメージを得る。波としては重力波を想定している。

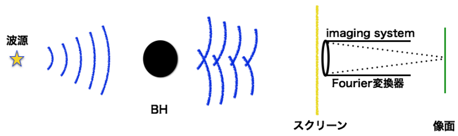

図 1: BH による散乱波とイメージングの方法

2 Kerr 時空上でのスカラー波

本研究では簡単のため、波の偏光を無視したスカラー波による計算を行う。また、本研究では散乱体（ブラックホール）に対して波長が短い波を考え、WKB 近似を用いて波の散乱問題を記述する。
解くべき方程式は Kerr 時空上の Klein Gordon 方程式である。

$$\Box\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\right) = S \tag{1}$$

metric は Kerr metric であり、Boyer Lindquist 座標を用いる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4Mar\sin^2\theta}{\Sigma}dtd\phi \\ &+ \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{A\sin^2\theta}{\Sigma}d\phi^2 \end{aligned}$$

ここで a はブラックホールの回転パラメータであり a/M は 0 から 1 までを取る。また $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2,\ \Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta,\ A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta$ である。Kerr 時空上でスカラー場は $\Phi = R(r)S_{lm}(\theta)e^{im\phi}e^{-i\omega t}$ のように変数分離ができ、斉次方程式 $\Box\Phi = 0$ の $R(r)$ と $S_{lm}(\theta)$ は WKB 近似を用いて以下のように求まる。

$$R(r) = Ae^{i\int dr\frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta}} + Be^{-i\int dr\frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta}}$$

$$S_{lm} = \frac{1}{\Theta^{1/4}}\left(e^{i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\theta'\sqrt{\Theta}} + (-)^{l+m}e^{-i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\theta'\sqrt{\Theta}}\right)$$

ここで $\mathcal{R}$、Θ はポテンシャルに相当するもので

$$\mathcal{R} = (\omega(r^2+a^2) - ma)^2 - \Delta(\mathcal{Q} + (m - a\omega)^2)$$

$$\Theta = a^2\omega^2\cos^2\theta - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + \mathcal{Q} + L_z^2$$

で与えられる。

3 Green 関数

以下のような状況を考える。

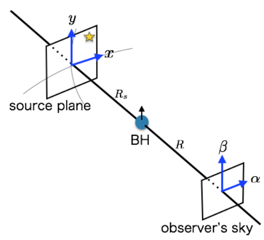

図 2: ソース-BH-観測者の位置関係

一般に Green 関数は斉次方程式の独立解を用いて構成される。前節で求めた解とホライズンで ingoing、遠方では outgoing という条件から Green 関数は以下のように求まる。

$$G(\alpha,\beta;x,y)=\frac{e^{i\omega(R+R_s)}}{2\pi i\omega RR_s}\sum_l\sum_m\frac{e^{im(\alpha+x)}}{\sqrt{\mathcal{Q}}}\times\left[e^{-i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta}+(-)^{l+m}e^{i\sqrt{\mathcal{Q}}\beta}+c.c(\beta\to y)\right]e^{i\delta_{lm}}e^{i\frac{\mathcal{Q}+m^2+a^2\omega^2}{2\omega}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_s}\right)} \quad (2)$$

この式は任意の回転パラメータ a に対して使うことができる。

4 散乱波の干渉パターンと Caustics

前節で得られた Green 関数を用いると、点源から発せられた波が Kerr ブラックホールに散乱された際の散乱波が得られる。観測者が赤道面 ($\theta=\frac{\pi}{2}$) にいる場合に観測者の天球面上での干渉パターンの例を次に示す。

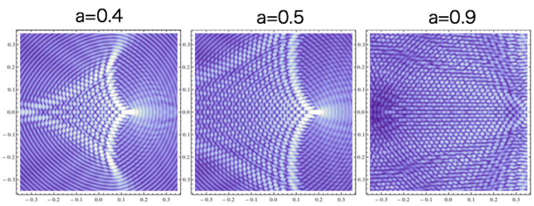

図 3: 散乱波の干渉パターン

干渉パターンに見られるダイヤの形は光学の分野で Caustic と言われる領域に相当する。

5 イメージとブラックホールシャドウ

散乱波は広範囲に広がっており、干渉パターンは直接観測可能なものではない。しかし、散乱波のごく一部の情報から散乱体の姿を捉えることは可能である。これは望遠鏡が行う操作に対応し、計算上は散乱波の 2 次元 Fourier 変換をすることに相当する。

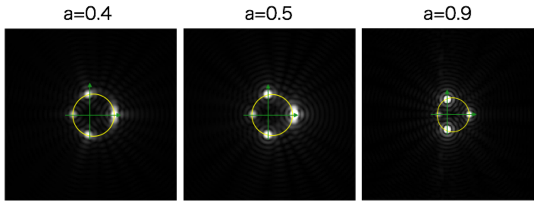

図 4: 散乱波の Fourier 変換により得られたイメージ

イメージが 4 つになっているのは非球対称レンズによる散乱の一般的な性質である。また黄色い円は幾何光学を用いて計算したブラックホールシャドウの輪郭であり波動光学による点光源のイメージはその輪郭に乗っていることがわかる。

6 まとめと議論

本研究では Kerr ブラックホールを散乱体とした波の散乱問題を Green 関数を用いて記述した。散乱波には Caustic の構造が現れ、散乱体が球対称でないことわかる。また、散乱波を 2 次元フーリエ変換したイメージの位置は幾何光学 (geodesics) を用いて計算されたブラックホールシャドウの輪郭上に乗ることが分かった。

Reference

P. Schneider, J. Ehlers & E.E. Falco ”Gravitational Lenses” , Springer

Yasusada Nambu, & Sousuke Noda ”Wave Optics in Black Hole Spacetimes: Schwarzschild case”, arXiv: gr-qc 1502.05468