Bigravity 理論におけるテンソルモード

山本 久司 (京都大学大学院 基礎物理学研究所)

Abstract

宇宙の加速膨張を引き起こすとされるダークエネルギーの説明として，宇宙項によるものではなく一般相対論そのものを修正する試みがされている。本発表では，その修正重力理論の一つであり，近年宇宙項無しで加速膨張する解が見つかったということで注目されている bigravity 理論に着目し，M. C.Johnson and A. Terrana(2015) の論文に従ってテンソルモードにおいて重力波観測量がどのように振る舞うのかについて調べた。

1 Introduction

近年，ダークエネルギーの謎を説明するなどのモチベーションから一般相対論の修正について盛んに研究されている。一般相対論は 1 つの計量で記述される，massless graviton の理論である。一方，bigravity 理論 (S.F.Hassan and R.A.Rosen. 2011) は 2 つの計量を含む修正重力理論であり，full に非線形で ghost(非物理的な自由度) のない massive graviton の理論である。この理論には一様等方かつ加速膨張をする宇宙論解があることがわかっている (F.Koennig. 2014)。これは infinity-branch bigravity(IBB) と呼ばれている。

本発表では M.Johnson and A.Terrana(2015) のレビューを行い，この IBB に対してテンソル摂動を計算してインフレーション起源の原始重力波のエネルギースペクトルを求める。

2 Bigravity

以下では $c=1, \hbar=1$ の単位系を用いる。この時，Planck mass は $M_{pl}=(8\pi G)^{-1/2}$ となる。Bigravity 理論における ghost-free な action は次で表される。

$$S=-\frac{M_{pl}^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}R(g)-\frac{M_{pl}^2}{2}\int d^4x\sqrt{-f}R(f)+S_{int}[g,f]+S_{matter}[g,\phi]$$

ここで，matter と相互作用する物理的な metric を $g_{\mu\nu}$ で，$g_{\mu\nu}$ とだけ相互作用する reference metric を $f_{\mu\nu}$ と表す。

S の第一項は $g_{\mu\nu}$ についての Einstein-Hilbert action，第二項は $f_{\mu\nu}$ についての Einstein-Hilbert action，S_{matter} は $g_{\mu\nu}$ とスカラー場 ϕ などを含む matter についての action である ($f_{\mu\nu}$ を含まないことに注意)。残る S_{int} が bigravity に特徴的な $g_{\mu\nu}$ と $f_{\mu\nu}$ の相互作用に対応する項で，次で定義される。

$$S_{int}=m^2M_{pl}^2\int d^4x\sqrt{-g}\sum_{n=0}^{4}\beta_n^*e_n(X)$$

ここで，$X^2=g^{-1}f$ を満たす行列 $X=\sqrt{g^{-1}f}$ に対して

$$e_0(X)=1$$
$$e_1(X)=tr(X)$$
$$e_2(X)=\frac{tr(X)^2-tr(X^2)}{2}$$
$$e_3(X)=\frac{tr(X)^3-3\,tr(X^2)tr(X^2)+2\,tr(X^3)}{6}$$
$$e_4(X)=det(X)$$

また β^* は無次元の理論パラメータ，m は coupling constant で graviton mass に対応した質量の次元を持つパラメータである。

action S を $g_{\mu\nu}$,$f_{\mu\nu}$ について変分を取ることで場の方程式が得られる。$g_{\mu\nu}$ の変分から

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\frac{m^2}{2}\sum_{n=0}^{3}(-1)^n\beta^*\left[g_{\mu\lambda}Y^{\lambda}_{(n)\,\nu}(X)+g_{\nu\lambda}Y^{\lambda}_{(n)\,\mu}(X)\right]=\frac{T_{\mu\nu}}{M_{pl}} \tag{1}$$

$f_{\mu\nu}$ の変分から

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f_{\mu\nu}\tilde{R} + \frac{m^2}{2}\sum_{n=0}^{3}(-1)^n\beta^*\left[f_{\mu\lambda}Y^{\lambda}_{(n)\,\nu}(X^{-1}) + f_{\nu\lambda}Y^{\lambda}_{(n)\,\mu}(X^{-1})\right] = 0 \quad (2)$$

ここで，行列 $Y_{(n)}$ は次で定義される。(I は 4× 4 の単位行列)

$$Y_{(0)}(X) = I$$
$$Y_{(1)}(X) = X - tr(X)I$$
$$Y_{(2)}(X) = X^2 - tr(X)X + \frac{1}{2}\left[tr(X)^2 - tr(X^2)\right]$$
$$Y_{(3)}(X) = X^3 - tr(X)X^2 + \frac{1}{2}\left[tr(X)^2 - tr(X^2)\right]X + \frac{1}{6}\left[tr(X)^3 - 3tr(X)tr(X^2) + 2tr(X^3)\right]I$$

(1)(2) が bigravity における場の方程式であり，これは $m = 0$ で一般相対論と一致していることがわかる。

3　宇宙論解とテンソル摂動

Bigravity には次の形の加速膨張する一様等方解が存在することが知られている。

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} &= a(\tau)^2(-d\tau^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j) \\ f_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} &= b(\tau)^2(-c(\tau)^2 d\tau^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j) \end{aligned}$$

またストレステンソルは

$$T^{\mu}_{\ \nu} = (\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} + p\delta^{\mu}_{\nu}$$

このとき，

$$\beta^*_0 = \beta^*_2 = \beta^*_3 = 0,\ \beta^*_1 \neq 0,\ \beta^*_4 \neq 0$$

となる場合に安定な宇宙論解 (IBB) が存在し，type Ia SNe との fitting(F. Koennig et al.(2014)) による best-fit value は $\beta^*_1 = 0.48$, $\beta^*_4 = 0.94$ である。

これを背景時空として transverse traceless なテンソル摂動 $h_{g,ij}$, $h_{f,ij}$ を与え，g, f についてそれぞれ $+, \times$ モードに分解する：

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

今後，以下のように定義した記号を用いる。(0 は現在の時刻での値)

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{1}{a^2}\frac{da}{d\tau} = \frac{\dot{a}}{a^2}$$
$$\mathcal{H} = \frac{1}{H_0}\frac{\dot{a}}{a},\quad \beta_n = \frac{m^2}{H_0^2}\beta^*_n,\quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{M_{pl}^2 H_0^2},\quad r = \frac{b}{a}$$

このとき場の方程式から $+, \times$ モードそれぞれ独立な式が得られ，Fourier 空間で次のようになる。

$$\ddot{h}_g + 2\mathcal{H}\dot{h}_g + k^2 h_g + a^2\lambda(r)\left(h_g - h_f\right) = 0 \quad (3)$$
$$\ddot{h}_f + \left[2(\mathcal{H} + \dot{r}/r) - \dot{c}/c\right]\dot{h}_f + c^2k^2h_f - \frac{a^2\lambda(r)c}{r^2}\left(h_g - h_f\right) = 0 \quad (4)$$

ここで　$\lambda(r) = \beta_3 cr^3 + \beta_2(c+1)r^2 + \beta_1 r$

$\beta_n = 0 (i.e.\, \lambda(r) = 0)$ のとき，(3) 式は一般相対論における重力波の伝播の式に一致する。
(3) と (4) をインフレーションが終わる時刻を初期時刻 $\tau = \tau_i$ として解く。このとき，インフラトンによるインフレーションを考えることで初期条件として

$$\dot{h}_g(\tau_i) = \dot{h}_f(\tau_i) = 0$$

がわかるので，background についての場の方程式から求めることができる $\mathcal{H}(\tau), r(\tau), c(\tau)$ と，$k, m, \tau_i, h_g(\tau_i), h_f(\tau_i)$ の値を与えることでテンソル摂動 h_g, h_f の時間変化を求めることができる。この結果から h_g に対するパラメータの依存性が次のように分かった：

$$\frac{h_g(\tau)}{h_g(\tau_i)} \propto \frac{m h_f(\tau_i)}{\tau_i k^2} \quad (5)$$

$$\text{for} \quad \frac{h_f(\tau_i)}{h_g(\tau_i)}, \frac{m}{H_0} > A_{crit} \quad (6)$$

ここで A_{crit} はある critical value。つまり，(6) の条件を満たしているとき，ある h_g を与えるパラメータの値は縮退している。

4　原始重力波

原始重力波のエネルギースペクトルは次で定義される。

$$\Omega_{GW} = \frac{2\pi}{\rho_{crit}} \frac{d\rho_{GW}}{d\,\mathrm{ln}k}$$

ここで ρ_{GW} は重力波のエネルギー密度，ρ_{crit} は臨界密度で

$$\rho_{crit}(\tau) = \frac{3H(\tau)^2}{8\pi G} = \frac{3H_0^2 M_{pl}^2 \mathcal{H}(\tau)^2}{a(\tau)^2}$$

である。重力波のエネルギー密度には physical metric h_g だけが寄与し，L. A. Boyle and P. J. Steinhardt(2008) によるとテンソルモードではこのエネルギースペクトルは

$$\Omega_{GW}(k,\tau) = \frac{k^2\,|h_g(k,\tau)|\,+\,|\dot{h}_g(k,\tau)|^2}{12\pi^2\mathcal{H}^2(\tau)} \tag{7}$$

と求められる。これを IBB に対して現在の時刻 $\tau = \tau_0$ で評価したものが次の図 1 から 3 である。このとき，

$$\tau_i = 10^{-6} H_0^{-1},\ m = H_0,\ h_g(\tau_i) = 1 \tag{8}$$

として，図 1 は $h_f(\tau_i) = 10^{-3}$，図 2 は $h_f(\tau_i) = 10^{-5}$，図 3 は $h_f(\tau_i) = 10^{-7}$ に対してプロットしたもので，青い線は一般相対論の結果である。

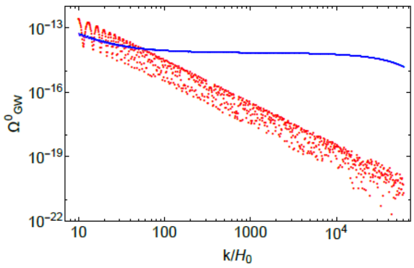

図 1: $h_f(\tau_i) = 10^{-3}$

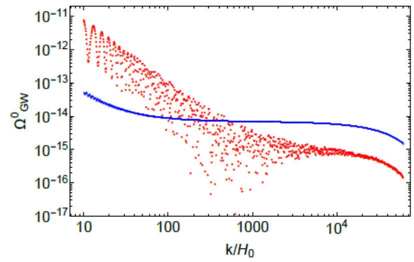

図 2: $h_f(\tau_i) = 10^{-5}$

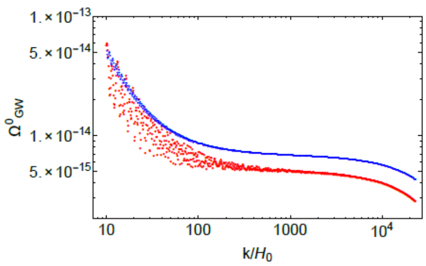

図 3: $h_f(\tau_i) = 10^{-7}$

5 Discussion

図 1〜3 によると，$h_f(\tau_i)$ の値を小さくするほど一般相対論の結果に近づいていくことがわかるので，十分この値を小さくすることでそれほど一般相対論と違わないような結果を生むこともできる。
実際は $h_f(\tau_i) \simeq h_g(\tau_i)$ であることが知られており，今は (8) の条件で解いているが (5) の依存関係があるため，この $h_f(\tau_i)$ の選択は m や τ_i の選択に相当している。したがって，もしインフレーションが終わる時刻 τ_i が正確に知ることができ，原始重力波を観測することができれば "graviton mass" m に制限をつけることができると思われる。

Reference

S. F. Hassan and R. A. Rosen, Journal of High Energy Physics **2**, 126(2012), arXiv:1109.3515 [hep-th].

F. Koennig, Y. Akrami, L. Amendola, and M. Motta, and A. R. Solomon, Phys.Rev. **D90**, 124014 (2014), arXiv:1407.4331 [astro-ph.CO].

M. Johnson and A. Terrana, (2015), arXiv:1503.05560 [astro-ph.CO].

L. A. Boyle and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D 77, 063504 (2008), astro-ph/0512014.

F. Koennig, Y. Akrami, L. Amendola, M. Motta, and A. R. Solomon, ArXiv e-prints (2014), arXiv:1407.4331.