ブレーンワールドシナリオにおけるインフレーション

徳田順生 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

本発表では主に論文 [1] の Review を行う。論文 [2] の結果も用いる。高次元時空を考慮に入れた現象論モデルとして 5 次元の Anti de Sitter 時空 (AdS_5bulk) に我々の住む 4 次元の膜 (brane) が一枚浮かんでいるという描像 (RS-2 model) が 1999 年に L.Randall,R.Sundrum によって提唱された。[3] 今回はこの model において brane 上のハッブルパラメーターが一定という近似の下インフレーション中に生成される揺らぎの計算を線形レベルで行い、現在の観測結果及び 4 次元の一般相対論 (GR) の結果と比較する。ただし、インフレーションは inlaton として canonical な単一スカラー場により引き起こされるとした。また、作用には曲率の 2 次の項である Gauss-Bonnet term(GB term) と、物質場と重力場の 1-loop 補正項である induced gravity term(IG term) を加える。その結果、ハッブル半径が AdS_5 の曲率半径よりも小さい領域においてはテンソル揺らぎ、スカラー揺らぎの振幅が GR の結果と異なり、consistency relation も破れることが分かった。一方で、Planck data[4][5] を用いて観測によるパラメータへの制限を行った結果、かなり広範囲のパラメータ領域において現在の観測値を満たすことが分かった。

1 Introduction

String/M theory によれば高次元時空の存在が示唆される。高次元時空の存在を考慮に入れた現象論モデルとして RS-2model がある。AdS_5bulk 時空上に我々の住む 4 次元の膜 (brane) が埋め込まれているとする描像である。このモデルでは、時空のダイナミクスである重力場のみが余剰次元方向に伝播できて、物質場は brane 上に局在化しているというこの描像でインフレーション由来の初期揺らぎを計算することで、高次元時空の存在の証拠を掴めるかもしれない。ここでは brane の計量を de Sitter として計算を行う。さらに、作用には GBterm と IGterm を加える。GB term は重力場の free な lagrangian に加わる補正項であり、IG term は brane 上に局在化した物質場による background metric への 1-loop level での back reaction である。また、以降、自然単位系を用いる。

2 RS-2 model with curvature effects

2.1 Action, Field eqs.

作用は次のように与えられる。

$S_{total} = S_{bulk} + S_{surface} + S_{brane}$

w/

$S_{bulk} = \frac{1}{2\kappa_5^2}\int_{bulk} d^5x\sqrt{-g^{(5)}}[\mathcal{R} - 2\Lambda_5 + \alpha(\mathcal{R}^2 - 4\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{ab} + \mathcal{R}_{abcd}\mathcal{R}^{abcd})]$

$S_{surface} = -\frac{1}{\kappa_5^2}\int_{\Sigma_\pm} d^4x\sqrt{-g^{(4)}[K + 2\alpha(J - 2G^{\mu\nu}K_{\mu\nu})]}$

$S_{brane} = \int_\Sigma d^4\sqrt{-g^{(4)}}[\frac{\gamma}{\kappa_4^2}R - \lambda + \mathcal{L}_m]$

ここで、

$a = 0 - 4,\ \mu = 0 - 3$

$\kappa_5^2 := 8\pi G_5, G_5$: 5 次元の重力定数

$\kappa_4^2 := 8\pi G_N, G_N$: 4 次元の重力定数

$\mathcal{R}$:5 次元の Ricci scalar

R:4 次元の Ricci scalar

$\Lambda_5(< 0)$: $bulk$ の宇宙定数

$\alpha(\geq 0)$: GB パラメータ　γ : IG パラメータ

λ:brane tension $K_{\mu\nu}$: 外的曲率

$J_{\mu\nu} := \frac{1}{3}(2KK_{\mu\sigma}K^\sigma_\mu + K_{\rho\sigma}K^{\rho\sigma}K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\rho}K^{\rho\sigma}K_{\sigma\nu} - K^2K_{\mu\nu})$

このとき、場の従う方程式は次のようになる。

Bulk において、

$$\mathcal{G}_{ab} + \Lambda_5 g^{(5)}_{ab} - \frac{\alpha}{2}\mathcal{H}_{ab} = 0 \tag{1}$$

brane 上での接続条件は

$$\begin{aligned} 2(K_{\mu\nu} - Kg_{\mu\nu}) + 4\alpha(3J_{\mu\nu} - Jg_{\mu\nu} + 2P_{\mu\rho\sigma\nu}K^{\rho\sigma}) \\ = -\kappa_5^2(T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} - \frac{\gamma}{\kappa_4^2}G_{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{2}$$

w/

$\mathcal{H}_{ab} := (R^2 - 4\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{ab} + \mathcal{R}_{abcd}\mathcal{R}^{abcd})g^{(5)}_{ab}$
$- 4(\mathcal{R}\mathcal{R}_{ab} - 2\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^c_b - 2\mathcal{R}_{acbd}\mathcal{R}^{cd} + \mathcal{R}_{acde}\mathcal{R}^{cde}_b)$
$\mathcal{G}_{ab}$:5 次元の Einstein tensor
$G_{\mu\nu}$:4 次元の Einstein tensor
ここで、brane により隔てられた bulk の 2 つの領域は brane を挟んで対称であるとした。(Z_2-symmetry を課した。) また、brane 上には一様で canonical なスカラー場を 1 つ導入し (single inflaton)、このエネルギー密度を ρ とおく。この inflaton により brane は de Sitter(dS_4) brane となりインフレーションが引き起こされる状況をここでは考える。

2.2 Warp factor, Friedmann eq.

AdS_5 の曲率半径を l とおき、$\mu := 1/l$ とおくと、bulk における field eq. から、

$$\mu^2 = \frac{1}{4\alpha}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{3}\alpha\Lambda_5}\right) \tag{3}$$

と求まる。(ここで、安定なブランチを選んだ。)
dS_4brane 近傍の時空は Gaussian normal coordinate で覆うことができて、

$$\begin{aligned} ds^2 &= n^2(y)[-dt^2 + e^{2Ht}\delta_{ij}dx^i dx^j] + dy^2 \\ n(y) &= \frac{H}{\mu}sinh[\mu(y_* + \epsilon|y|)] \\ y_* &= \frac{1}{\mu}arcsinh(\frac{\mu}{H}) \end{aligned}$$

となる。brane は $y = 0$ にあるとする。n(y) は warp factor といい、ここでは $n(y) = 1$ と規格化されている。ここで、$\epsilon = \pm 1$ である。また接続条件から、Friedmann eq.

$$\sqrt{H^2 + \mu^2}\left[1 + \frac{8}{3}\left(H^2 - \frac{\mu^2}{2}\right)\right] = -\epsilon r_c\left[\kappa_4^2(\rho + \lambda) - \gamma H^2\right] \tag{4}$$

が求まる。($r_c := \kappa_5^2/2\kappa_4^2$)
以降、$\epsilon = -1$ ブランチ (normal branch) を考える。normal branch では $\alpha \to 0, \gamma \to 0$ 極限で、もともとの RS-2model(作用に GB,IG terms が含まれないもの) に帰着される。
normal branch では $n(y) > 0$ 領域は $|y| < y_*$ である。

3 Primordial Gravitational Waves

3.1 Tensor perturbations and Kaluza-Klein decomposition

以下の 3Dtensor perturbation を考える。
$ds^2 = n^2(y)[-dt^2 + e^{2Ht}(\delta_{ij} + h_{ij}(t, x^i, y))dx^i dx^j] + dy^2$
このとき、(1)(2) 式の線形レベルの摂動方程式は変数分離可能な形をしており、Kaluza-Klein decomposition

$$h_{ij}(t, x^i, y) = \int dm\varepsilon_m(y)h^{(m)}_{ij}(t, x^i)$$

を行うことで、

$$(\nabla^\mu\nabla_\mu + m^2)h^{(m)}_{ij}(t, x^i) = 0 \tag{5}$$

$$(n^2\partial_y^2 + 4n(\partial_y n)\partial_y + m^2)\varepsilon_m(y) = -\frac{2m^2}{1-\beta}(\gamma r_c + \beta l\sqrt{1 + x^2})\varepsilon_m(y)\delta(y) \tag{6}$$

という固有値問題に帰着できる。ここで、$\nabla^\mu\nabla_\mu$ は brane 上の d'Alembertian である。また、brane 上の非等方ストレスは無視した。また、$\beta := 4\alpha\mu^2, x := H/\mu$ と定義した。これにより、brane 上でみた graviton は

$$\bar{h}^{(m)}_{ij}(t, x^i) := h^{(m)}_{ij}(t, x^i)\varepsilon_m(0)$$

と表され、mass m を持つように見える。また、$\varepsilon_m(0)$ の factor がかかることがポイントである。この factor は、初期重力波振幅の GR で計算された値からのずれに寄与する。
また、各モードは以下で定義される scalar product に関して直交している。

$$\begin{aligned} (\varepsilon_m, \varepsilon_n) :=& \int_{|y|<y_*} dyn^2(y)\varepsilon_m(y)\varepsilon_n(y) \\ &+ \frac{2}{1-\beta}(\gamma r_c + \beta l\sqrt{1 + x^2})\varepsilon_m(0)\varepsilon_n(0) \\ =& \delta(m, n) \end{aligned} \tag{7}$$

ここで、$\delta(m,n)$ は離散スペクトルに対してはクロネッカーのデルタ、連続スペクトルに対してはディラックのデルタ関数である。この式により規格化を行う。

3.2 fine-tuning conditions

(i)brane 上の pure な宇宙項 $\Lambda_{(4)} = 0$ を課す。
即ち、$\rho = 0$ の時、$H = 0$ を課す。Friedmann eq.(4) より、

$$\kappa_5^2 \lambda = 2\mu(3-\beta) \tag{8}$$

(ii) 低エネルギー極限で GR に帰着
即ち、Friedmann eq.(4) の解を ρ が他のエネルギースケールよりも小さいとして展開し、$H^2 = \rho\kappa_4^2/3$ を課す。すると、(8) 式も用いて、

$$\kappa_4^2 = \left(\frac{1-\gamma}{1+\beta}\right)\mu\kappa_5^2 \tag{9}$$

を得る。

3.3 Amplitudes

(5)(6)(7) 式を詳しく調べると、規格化可能な modes は $m = 0$(zero mode), $m^2 > 9H^2/4$(連続スペクトル、KK-modes) であることがわかる。インフレーション中各モードは急激に引き伸ばされ、その波長はハッブル半径を超える (horizon crossing)。massless mode は horizon crossing 後揺らぎが定数になる一方、massive modes は horizon crossing 後減衰していくことが分かる。そのため、観測される初期重力波の振幅への寄与は zero mode が支配的であるから、zero mode のみを考える。
結果、テンソルモードのパワースペクトル P_T は、

$$P_T = 4\kappa_5^2\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 = [P_T]_{4D}F_{\alpha,\gamma}^2 \tag{10}$$

w/
$F_{\alpha,\gamma}^2 \coloneqq C^2\kappa_5^2/\kappa_4^2$
$[P_T]_{4D}$ は GR におけるテンソルモードのパワースペクトル
$C \coloneqq \varepsilon_0(y) = const.$
C の値は規格化の式 (7) により計算できる。式 (9)(10) により、このモデルにおけるテンソルモードのパワースペクトルの α, γ, H, μ 依存性がわかる。
また、論文 [2] の結果ではスカラーモードのパワースペクトル P_S を計算している。ここでは結果のみを用いるが、

$$P_S = [P_S]_{4D}G_{\alpha,\gamma}^2(x) \tag{11}$$

tensor to scalar ratio

tensor to scalar ratio を

$$\frac{P_T}{P_S} =: r \tag{12}$$

で定義する。

consistency relation

GR における consistency relation は

$$\frac{[A_T^2]_{4D}}{[A_S^2]_{4D}} = -\frac{1}{2}n_T \tag{13}$$

である。一方、今回のモデルにおいては

$$\frac{A_T^2}{A_S^2} = -\frac{Q}{2}n_T \tag{14}$$

となる。ここで、$A_T^2 \coloneqq P_T/100, A_S^2 \coloneqq 4P_S/25, n_T \coloneqq \frac{dlnA_T^2}{dlnk}|_{k=aH}$(スペクトル指数) と定義した。$Q \neq 1$ となると、consistency relation が破れているということになる。なお、ここには $F_{\alpha,\gamma}(x)$, $G_{\alpha,\gamma}(x)$, Q の陽な表式を書かなかったが、計算により求めることができる。(なお、論文の notation に合わせて Q と書いたが、Q も α, γ, x の関数であるので注意せよ。)

4 Conclusion

結果は次のようになる。すべての図は、論文 [1] からの引用である。このグラフからわかるように、$x > 1$ 領域では重力波振幅の値が GR の時の計算値から大きくずれ、consistency relation も破れている。また、GB, IG 補正項を加えたことにより、$x \gg 1$ における重力波振幅の発散が抑えられていることも分かる。なお、consistency relation は canonical な単一スカラー場が inflaton として導入されたときに限る。そのた

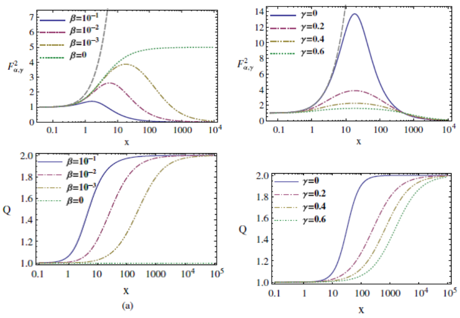

図 1: 左の図は、$\gamma = 0.2$ と固定し、β を動かしている。一方右の図は $\beta = 10^{-3}$ と固定し γ を動かしている。

め、今後の観測で consistensy relation が破れていることが分かってもインフレーションのモデル依存性も関与してくるため、余剰次元モデルに制限をつけられるとは考え難い。

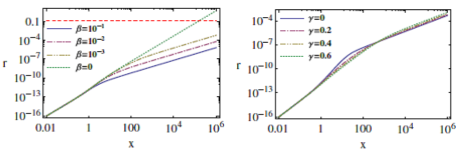

図 2: 左の図は、$\gamma = 0.2$ と固定し、β を動かしている。一方右の図は $\beta = 10^{-3}$ と固定し γ を動かしている。Planck data[4][5] により $P_S = 2.215 \times 10^{-9}$ と固定し、さらにここでは一例として $\kappa_4 \mu = 10^{-10}$ と固定した。

Planck data[4][5] によれば、pivot scale $k_* = 0.05\text{Mpc}^{-1}$ において $P_S = 2.215 \times 10^{-9}$ であり、$k_* = 0.002\text{Mpc}^{-1}$ において $r \leq 0.11$ である。これらのモードはインフレーション中の十分初期に horizon crossing をしたと考えられるので、ハッブルパラメータを一定とした近似は良い近似であると考えられる。図 2 より、現在のところ非常に広いパラメータ範囲で観測結果と整合していることがわかる。そのため、今のところ観測的に α, γ などといったパラメータに観測的に制限がついたとは言い難い。今後、さらなる観測精度の向上および重力波の直接観測などによりこの model がどれだけ制限されるかは、非常に興味深い。

Refference

[1]M.B.L$\acute{o}$pez, Y.W.Liu, K.Izumi, and P.Chen
Phys. Rev. D. 89, 063501 (2014)
[2]M.B.L$\acute{o}$pez, P.Chen, and Y.W.Liu,
Phys. Rev. D. 86, 083531 (2012)
[3]L.Randall,andR.Sundrum,
Phys. Rev. Lett. 83, 23 (1999)
[4]P.A.R.Ade *et al*(Planck Collaboration), arXiv:1303.5076.
[5]P.A.R.Ade *et al*(Planck Collaboration), arXiv:1303.5082.