Inflationary perturbations in the Lifshitz regime of Horava gravity

新居 舜 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

今回我々は、非対称スケーリング則 $t \to b^z t, \mathbf{x} \to b\mathbf{x}$ を保存する (3+1) 次元時空において、non-projectable Horava gravity と inflation として単一 Lifshitz スカラー場を用いたインフレーションモデルを構築し、scalar graviton と inflaton の相互作用の様子を線形解析した。その結果、短波長領域では scalar graviton と inflaton のゆらぎが連成振動を起こしていることがわかった。また、短波長領域における解を長波長領域へと外挿した場合に連成振動がゆらぎのパワースペクトラムにどのように影響するかを考察した。

1 Introduction

一般相対性理論は 100 年前に誕生して以来、水星の近日点移動、重力レンズ効果、宇宙膨脹などの数々の現象をすべて説明することに成功した強力な重力理論である。ところが、一般相対性理論を量子論的に取り扱うことは深刻な問題を引き起こす。一般相対性理論に基づく重力の量子効果の計算では、UV 発散を抑えることが出来ないという深刻な問題がある。これは一般相対性理論のくりこみ不可能性と呼ばれ、理論物理学が抱える大きな問題の 1 つである。この問題の解決案の 1 つとして、2009 年に P.Horava によって提唱された Horava Lifshitz (HL) 重力理論 [1] がある。HL 重力理論は、(D + 1) 次元時空において空間と時間が非対称スケーリング則 $t \to b^z t, \mathbf{x} \to b\mathbf{x}$ を満たす場合、$z \geq D$ であれば重力のラグランジアンは次元勘定くりこみ可能となる。しかしその一方で、$z = 1$ のスケール則に従う Lorentz 対称性を破るという大きな特徴を持つ。したがって、Lorentz 対称性の破れを通して HL 重力理論を検証することが可能である。しかし実際には、太陽近傍の重力異常の測定 [3] や Fermi や MAGIC などの γ 線の time delay の測定 [5, 6] などの観測により、TeV 以下のエネルギースケールでは Lorentz 対称性が破れていないことが示されている。この観測事実から、HL 重力理論の低エネルギー有効理論が一般相対性理論となるという制約が生ずる。理論的な研究では、くりこみ群の手法を用いて HL 重力理論の IR 領域での振舞いを調べる研究は現在も続いているが、未だ発展途上である [2]。さらに、HL 重力理論の摂動計算では新たなスカラー自由度である scalar graviton が現れるが、scalar graviton と物質場のあいだの相互作用についても研究が進んでいる段階である。このような背景により、HL 重力理論の LIV scale を探索するためにインフレーションの現象論を利用することは大変意義がある。というのも、インフレーションは、10^{16}GeV を超える非常に高エネルギーの現象であると同時に、インフレーション期に生成する初期ゆらぎは CMB の精密観測を通して観測が可能であるという特徴を兼ね備えているからである。この特徴を用いれば、HL 理論に対するこれまでにない制限がつけられると期待される。これが本研究の主たる動機である。

今回我々は、背景重力場を固定した場合の初期揺らぎの生成 [7] の研究を発展させて、scalar graviton と inflaton の相互作用をより厳密に計算するモデルを構築した。より具体的には、(3+1) 次元時空においてゴースト不安定性のない non projectable Horava gravity[3] と inflation として single Lifshitz scalar を用いたインフレーションモデルを構築し、1 次摂動のスカラーモードの時間発展を解析的に計算した。

この集録では本研究の進捗を次のようにまとめた。まず最初に section2 では HL 重力および単一 Lifshitz スカラー場のラグランジアンを与え、背景時空の方程式を導出する。次に section3 で短波長領域でのゆらぎの時間発展をもとめ、scalar graviton と inflaton

のゆらぎの発展方程式とその解を求めた。最後に、section4 では本研究の結論と今後の研究課題について述べる。

2 Setup

(3+1) 次元時空における非対称スケーリング則

$$t \to b^z t, \mathbf{x} \to b\mathbf{x}\ (1 \le z \le 3)\,, \tag{1}$$

が保存されるような微分同相写像 $\mathcal{D} : t \to \tilde{t}(t), \mathbf{x} \to \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)$ に対して不変な重力セクター及び inflaton セクターのラグランジアンは以下のようになる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{HG} + \mathcal{L}_{inf}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{HG} &= N\sqrt{\gamma}\Bigg\{ \frac{M_*^2}{2}\left[\frac{1}{\alpha_1}K_{ij}K^{ij} - \frac{1}{\alpha_2}K^2 + \frac{1}{\alpha_3}R + a_i a^i\right] \\ &- \frac{1}{2}\left[\frac{R_{ij}R^{ij}}{\beta_1} + \frac{R^2}{\beta_2} - \frac{R\nabla_i a^i}{\beta_3} + \frac{a_i \Delta a^i}{\beta_4}\right] \\ &- \frac{1}{2M_*^2}\left[\frac{(\nabla_i R_{jk})^2}{\gamma_1} + \frac{(\nabla_i R)^2}{\gamma_2} + \frac{\Delta R \nabla_i a^i}{\gamma_3} - \frac{a_i \Delta^2 a^i}{\gamma_4}\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{inf} &= N\sqrt{\gamma}\Bigg\{ \frac{(\dot{\Phi} - N^i \partial_i \Phi)^2}{2N^2} + \varkappa_1 \frac{\Phi \Delta \Phi}{2} - \\ &\varkappa_2 \frac{\Phi \Delta^2 \Phi}{2M_*^2} + \varkappa_3 \frac{\Phi \Delta^3 \Phi}{2M_*^4} - V(\Phi)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4}$$

但し、各記号は以下のように定義する。

M_* — LIV scale,

$ds^2 = (N^2 - N_i N^i)dt^2 - 2N_i dt dx^i - \gamma_{ij} dx^i dx^j$,

$K_{ij} = \dfrac{\dot{\gamma}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i}{2N}$,

$a_i = \dfrac{\partial_i N}{N}(\mathrm{non-projectable} : a_i \neq 0)$,

R_{ij} — 3-次元リッチテンソル,

Δ — 3 次元ラプラシアン .

次に、計量の 1 次摂動のスカラーモード $\phi, B, \mathcal{R}$ を導入する。

$$N = e^{\phi}, \quad N_i = \partial_i B, \quad \gamma_{ij} = a^2 e^{2\mathcal{R}} \delta_{ij}\,. \tag{5}$$

さらに、inflaton のゆらぎの自由度を φ で定義する。これら 4 成分の自由度に対して式 (3)(4) を摂動展開すると、摂動の 0 次で以下のような背景時空の方程式を得る。

$$\frac{3M_*^2}{2}\left(\frac{3}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1}\right)H^2 = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V\,, \tag{6}$$

$$M_*^2\left(\frac{3}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1}\right)\dot{H} = -\dot{\Phi}^2\,, \tag{7}$$

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\Phi} = 0\,. \tag{8}$$

また、スローロールパラメータ ε_{n} を

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &\equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{(1-2\bar{\alpha})\alpha_1}{2(1+\bar{\alpha})}\left(\frac{\dot{\Phi}}{M_* H}\right)^2\,, \\ \varepsilon_n &= a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\ln \varepsilon_{n-1}\,, \qquad (n \ge 2)\end{aligned} \tag{9}$$

と定義する。

次に、摂動の 1 次に関して、ハミルトニアン拘束条件および運動量拘束条件を用いて独立な 2 つの自由度である $\varphi, \mathcal{R}$ の従うラグランジアンを書き下す。今回は短波長領域において支配的な項だけを残して解析した。次章でその結果を見る。

3 Results

十分短波長領域 $p/\mathcal{H} \gg 1$ およびスローロール近似の leading order のみを残すと、$\mathcal{R}$,φ のモード関数 $\mathcal{R}_p$,φ_p は以下の線形微分方程式を満たす。ただし、この章では t 微分から conformal time $\mathrm{d}/\mathrm{d}\eta = a\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ に変更し、これを $'$ とする。

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_p'' + 2\mathcal{H}\mathcal{R}_p' + \bar{\alpha}\omega_{\mathcal{R}}^2 \mathcal{R}_p \\ &\quad + \frac{1}{\mathcal{M}^2}\left(\frac{1-2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} + \Omega_2\right)\Phi'\varphi_p' = 0\,,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\varphi_p'' + 2\mathcal{H}\varphi_p' + \omega_{\varphi}^2 \varphi_p \\ &\quad - \left(\frac{1-2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} + \Omega_2\right)\Phi'\mathcal{R}_p' = 0\,.\end{aligned} \tag{11}$$

新たに導入したパラメータの定義は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &\equiv aH\,,\\
\bar{\alpha} &\equiv \frac{1}{2}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}\,,\\
\mathcal{M}^2 &\equiv M_*^2\frac{1+\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}\alpha_1}\,,\\
\Omega_1 &\simeq \frac{2\mathcal{H}^2}{\mathcal{M}^2\left(\frac{p}{M_*}\right)^2\left(1+\frac{1}{\beta_4}\left(\frac{p}{aM_*}\right)^2+\frac{1}{\gamma_4}\left(\frac{p}{aM_*}\right)^4\right)}\,,\\
\Omega_2 &\simeq 2\,\frac{-\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\beta_3}\left(\frac{p}{aM_*}\right)^2+\frac{1}{\gamma_3}\left(\frac{p}{aM_*}\right)^4}{1+\frac{1}{\beta_4}\left(\frac{p}{aM_*}\right)^2+\frac{1}{\gamma_4}\left(\frac{p}{aM_*}\right)^4}\,,
\end{aligned} \tag{12}$$

さらに、$\omega_{\mathcal{R}}(t,\,p),\omega_{\varphi}(t,\,p)$ の定義は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\omega_{\mathcal{R}}^2(t,\,p)\\
&\simeq \frac{\alpha_1}{1+\bar{\alpha}}p^2\left[-\frac{1}{\alpha_3}+\left(\frac{3}{\beta_1}+\frac{8}{\beta_2}\right)\left(\frac{p}{aM_*}\right)^2\right.\\
&\left.+\left(\frac{3}{\gamma_1}+\frac{8}{\gamma_2}\right)\left(\frac{p}{aM_*}\right)^4\right]+\frac{1}{\bar{\alpha}}\frac{\Omega_2^2(t,\,p)}{\Omega_1(t,\,p)}\,,
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&\omega_{\varphi}^2(t,\,p)\\
&\simeq p^2\left[\varkappa_1+\varkappa_2\left(\frac{p}{aM_*}\right)^2+\varkappa_3\left(\frac{p}{aM_*}\right)^4\right].
\end{aligned} \tag{14}$$

$p/\mathcal{H}\gg 1$ で $\omega_{\mathcal{R}}(t,\,p),\omega_{\varphi}(t,\,p)$ は以下のような時間依存性を示す。

$$\omega_{\mathcal{R}}^2(t,\,p),\omega_{\varphi}^2(t,\,p)\propto\left(\frac{p}{aM_*}\right)^{2z}a^2\,. \tag{15}$$

したがって、WKB 近似が有効であるためには、以下の条件が必要である。

$$\left|\frac{\omega_j{}'}{\omega_j{}^2}\right|\propto\left(\frac{p}{aM_*}\right)^{-2z}a^{-2}H\le 1\ (j=\mathcal{R},\varphi)\,. \tag{16}$$

この場合、$\mathcal{R},\varphi$ それぞれの振動モードは互いに独立な振動子ではなく以下のような解となる。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_p(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2}a\mathcal{M}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\omega_+}}e^{-i\int\omega_+\mathrm{d}\eta}\right.\\
&\left.-\frac{i\omega_-}{\omega_-^2-\bar{\alpha}\omega_{\mathcal{R}}^2}\frac{\sqrt{2}\Phi'}{\mathcal{M}}\left(\frac{1-2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}}+\Omega_2\right)\frac{1}{\sqrt{2\omega_-}}e^{-i\int\omega_-\mathrm{d}\eta}\right],
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_p(\eta)\\
&=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{\sqrt{2\omega_-}}e^{-i\int\omega_-\mathrm{d}\eta}\right.\\
&\left.+\frac{i\omega_+}{\omega_+^2-\omega_{\varphi}^2}\frac{\Phi'}{\sqrt{2}\mathcal{M}}\left(\frac{1-2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}}+\Omega_2\right)\frac{1}{\sqrt{2\omega_+}}e^{-i\int\omega_+\mathrm{d}\eta}\right].
\end{aligned} \tag{18}$$

但し、$\omega_{\pm}^2$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
\omega_{\pm}^2 &= \frac{1}{2}W^2\pm\frac{1}{2}\sqrt{W^4-4\bar{\alpha}\omega_{\mathcal{R}}^2\omega_{\varphi}^2}\,,\\
W^2 &\equiv \bar{\alpha}\omega_{\mathcal{R}}^2+\omega_{\varphi}^2+\frac{\Phi'^2}{\mathcal{M}^2}\left(\frac{1-2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}}+\Omega_2\right)^2.
\end{aligned} \tag{19}$$

Φ' が十分小さいうちは、$\mathcal{R},\varphi$ は独立な振動となる。Φ' はスローロール近似の下で

$$\Phi'\simeq-\frac{a}{3H}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\Phi}\,, \tag{20}$$

となり、a に比例して増加する。したがって式 (19) の第 3 項が第 1、2 項と同じオーダーになってからは、$\mathcal{R},\varphi$ は式 (17)(18) において $\omega_{\pm}^2$ なる 2 つの振動モードが混ざった状態となる。仮にこのような振動モードを持つ WKB 解を、$p/\mathcal{H}\ll$ の解に外挿した場合には、連成振動の効果によって $\mathcal{P}_{\mathcal{R}\varphi}$ がゼロではないことがわかる。

4 Conclusion

今回我々は、scalar graviton と inflaton のゆらぎが条件 (16) を満たす場合に連成振動することを明らかにした。その結果、パワースペクトラムにおいて scalar graviton と inflaton のゆらぎの相関パワースペ

クトラムが出来ると述べた。しかし厳密には、WKB 近似が破れた後のゆらぎの時間発展をを調べる必要がある。さらに、長波長領域におけるゆらぎの振舞いを調べることは、ゆらぎが凍結された後の時間発展を知る上で重要となる。現在、我々はゆらぎの長波長領域における振舞いを解析しているところである。解析解を求めた後は、近似を用いずに発展方程式を数値計算して、短波長 · 長波長の両極限で解析解を再現しているかを確かめる。これらの研究が完成した後、パワースペクトラムを計算して観測と比較する段階へと研究を進める。

Reference

[1] P. Horava, Phys. Rev. D 79, 084008 (2009)

[2] S.Mukohyama, Class.Quant.Grav.27:223101,2010

[3] D. Blas, O. Pujolas and S. Sibiryakov, JHEP 1104, 018 (2011)

[4] M.C.Will 2005 Living Rev.Rel.9 3

[5] M.Ackermann et al. [Fermi GBM/LAT Collaborations] 2009 Nature 462 331

[6] J.Albert et al. [MAGIC Collaboration and Other Contributors Collaboration] 2008 Phys. Lett. B 668 253

[7] C.Armendariz-Picon N.F.Sierra, and Jaume Garriga JCAP 1007:010,2010