修正 Teleparallel 重力におけるインフレーション

中谷 侑司 (基礎物理学研究所)

Abstract

本発表は論文 Rafael Ferraro & Franco Fiorini (2007) の review である。Teleparallel 重力とは時空の並進変換に関するゲージ理論により重力を記述しようとするものである。この理論における時空には曲率が無く代わりに捩率が存在し、重力は幾何的な性質ではなく単なる力として記述される。基本変数はゲージ原理によって現れる四脚場となるが、局所ローレンツ変換の対称性があるため自由度が 16 個から 10 個に落ちている。これは計量の自由度と一致しており Teleparallel 重力が本質的に計量を記述する理論であることを表しており、実際に一般相対性理論 (以下 GR と略す) と完全に等価であることが示されている。そこでこの四脚場を本質的な量と捉える修正重力理論を考える。具体的には Teleparallel 重力におけるラグランジアンに Born-Infeld model を適用することで局所ローレンツ変換対称性を破り 6 個の自由度を復活させるということを行う。この修正 Teleparallel 重力の正当性の検証として空間的に平坦な一様等方宇宙がインフラトンを導入せずにインフレーションを起こすかどうかを考える。

1 Teleparallel 重力

Minkowski 時空上で微小並進変換は次のように書ける。

$$x^a \longrightarrow x^a + \epsilon^a \tag{1}$$

ここで x^a は Minkowski 座標である。この大域的な変換の下で不変な理論を考える。これにゲージ原理を課すと局所並進変換対称性をもつ理論を構築することになるため時空は Minkowski 時空である必要がなくなり、一般的にはまがった時空を考えることになる。その時空上で局所的に Minkowski 座標 (x^a) をとり局所並進変換

$$x^a \longrightarrow x^a + \epsilon^a(x^\mu)$$

を考える。x^μ は一般座標を表す。このとき物質場は

$$U(\epsilon)\phi(x^a) = \phi(x^a + \epsilon(x^\mu)) = \phi(x^a) + \epsilon^b(x^\mu)\partial_b\phi(x^a)$$

と変換する。特に変換演算子を抜き出すと

$$U(\epsilon) = 1 + \epsilon^a(x^\mu)\partial_a = 1 + \epsilon^a(x^\mu)P_a$$

となる。$P_a \equiv \partial_a$ は並進の生成子である。ゲージ原理に基づき共変微分を導入する：

$$D_\mu = \partial_\mu + B^a_\mu\partial_a$$

ここで B^a_μ はゲージ場である。つまりゲージ変換の下

$$B'_\mu = UBU^{-1} - (\partial_\mu U)U^{-1} \quad with \quad B_\mu \equiv B^a_\mu P_a$$

と変換する量である。ここで

$$D_\mu \equiv h^a_\mu P_a$$

という四脚場を基本変数として採用する。これより計量は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}h^a_\mu h^b_\nu$$

と書ける。次に

$$0 = \nabla_\nu h^a_\mu = \partial_\nu h^a_\mu - h^a_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu}$$

で定義される接続 ($Weitzenböck$ 接続) を入れる。この接続は計量と両立 ($\nabla_\mu g_{\rho\sigma} = 0$) し、かつ曲率テンソルが 0 である。代わりに捩率テンソル

$$T^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}$$

は 0 でない。
次にこの理論における作用を決める。field strength は

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu \\ &= \partial_\mu h^a_\nu - \partial_\nu h^a_\mu \end{aligned}$$

これを用いて作用を書き下すと次のようになる。

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi G}\left[\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^b_{\theta\rho}g^{\mu\theta}(\alpha\eta_{ab}g^{\nu\rho} + \beta h^\rho_a h^\nu_b + \gamma h^\nu_a h^\rho_b)\right]$$

ここで $h = det(h^a_\mu) = \sqrt{-g}$ で α, β, γ は定数。Yang-Mills 理論とは異なり時空の対称性を扱っているのでギリシャ文字の添え字とアルファベット添え字を混ぜる組み合わせが存在する。今 GR と等価な重力理論を構築しようとすると、この定数の組み合わせは

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -4$$

と決まる[1]。この作用を用いる Teleparallel 重力を特に TEGR(Teleparallel gravity Equivalent to General Relativity) と呼ぶ。Field strength と捩率の関係式 $F^a_{\mu\nu} = h^a_\rho T^\rho_{\mu\nu}$ を用いると Lagrangian は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{h}{16\pi G} F^a_{\mu\nu} F^b_{\theta\rho} g^{\mu\theta} \left(\frac{1}{4}\eta_{ab} g^{\nu\rho} + \frac{1}{2} h^\rho_a h^\nu_b - h^\nu_a h^\rho_b \right) \\
&= \frac{h}{16\pi G} \left[\frac{1}{4} T^\rho_{\mu\nu} T^{\mu\nu}_\rho + \frac{1}{2} T^\rho_{\mu\nu} T^{\nu\mu}_\rho - T^\rho_{\rho\mu} T^{\nu\mu}_\nu \right] \\
&= \frac{h}{16\pi G} S^{\mu\nu}_\rho T^\rho_{\mu\nu} \\
& \qquad \Bigg(S^{\mu\nu}_\rho = \frac{1}{4}(T^{\mu\nu}_\rho + T^\mu{}_\rho{}^\nu - T^\nu{}_\rho{}^\mu) \\
& \qquad\qquad -\frac{1}{2}(\delta^\nu_\rho T^{\mu\theta}_\theta - \delta^\mu_\rho T^{\nu\theta}_\theta) \Bigg) \\
&\equiv \frac{h}{16\pi G} T
\end{aligned}$$

最後に定義した量 T は torsion scalar と言う。

2 Born-Infeld model

Teleparallel 重力を修正することを試みる。ゲージ原理により得られた四脚場を局所 Lorentz 変換したもの、つまり

$$h^a_\mu \longrightarrow h'^a_\mu = (\delta^a_b + \omega^a_b) h^b_\mu$$

としたものを用いて上と同じ定式化を行うと Lagrange density は

$$T \longrightarrow T - \partial(2h^\mu_a h \partial_b \omega^{ab}) \tag{2}$$

と全微分項が加わるだけなので作用は不変である。つまり四脚場の自由度は 16 個から 10 個に落ちている。これは GR と等価な理論になっていることからも当然の結果である。ここでは計量ではなく四脚場を記述する理論としてこの自由度を復活させる次のようなモデルを考える。

$$\mathcal{L}_{\rm BI} = \frac{\lambda}{16\pi G} h \left(\sqrt{1 + \frac{2T}{\lambda}} - 1 \right) \tag{3}$$

この修正重力理論を Born-Infeld model と呼ぶ。このモデルでは $|\frac{T}{\lambda}| \ll 1$ のとき

$$\mathcal{L}_{\rm BI} \sim \frac{h}{16\pi G} T$$

となり Teleparallel 重力、つまり GR に帰着する。

3 修正 Teleparallel 重力による宇宙論解

Born-Infeld model による修正重力によって宇宙論解を求め、インフレーションが起こるかを見る。考える作用は

$$S = \int d^4x \frac{\lambda}{16\pi G} h \left(\sqrt{1 + \frac{2T}{\lambda}} - 1 \right) + S_{\rm matter} \tag{4}$$

変分原理により場の方程式は

$$\begin{aligned}
& 4\pi G h h^\lambda_a T^\nu_\lambda = \\
& \partial_\sigma \left(\left(1 + \frac{2}{\lambda} T \right)^{-1/2} h h^\lambda_a S^{\nu\sigma}_\lambda \right) - \left(1 + \frac{2}{\lambda} T \right)^{-1/2} \\
& \times h h^\lambda_a S^{\mu\nu}_\eta T^\eta_{\mu\lambda} + \frac{\lambda}{4} h h^\nu_a \left(\left(1 + \frac{2}{\lambda} T \right)^{-1/2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$T^\nu_\lambda = \frac{1}{h} h^a_\lambda \frac{\delta S_{\rm matter}}{\delta h^a_\nu}$$

である。平坦な空間をもつ一様等方宇宙の計量は $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a_\mu h^b_\nu = diag(N^2, -a^2, -a^2, -a^2)$ であるので四脚場は

$$h^a_\mu = diag(N(t), a(t), a(t), a(t))$$

[1] GR には四脚場にローレンツ変換分の自由度があるのでこの変換に関して作用が不変になることを要請すると導出できる。このとき Levi-Civita 接続における Riemann テンソルを $\dot{R}$ で表すと

$$\dot{R} = T - \frac{1}{h} \partial_\mu (h T^{\nu\mu}_\nu)$$

となることが示せるので Einstein-Hilbelt の作用と等価であることが確認できる。

と表される。以下では $N = 1$ と規格化する。また Source は一様等方流体

$$T^{\rho}_{\sigma} = diag(\rho(t), -p(t), -p(t), -p(t))$$

を考える。場の方程式は対称性から次の二つの式になる。

$$\left(1 - \frac{12H^2}{\lambda}\right)^{-1/2} - 1 = \frac{16\pi G}{\lambda}\rho \tag{5}$$

$$\left(\frac{16H^2}{\lambda} + \frac{4H^2}{\lambda}q - 1\right)\left(1 - \frac{12H^2}{\lambda}\right)^{-3/2} + 1 = \frac{16\pi G}{\lambda}p \tag{6}$$

ここで $H = \dot{a}/a$、$q = -(\ddot{a}a)/\dot{a}^2$ である。
これらから

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p\frac{d}{dt}a^3$$

が成り立つ。状態方程式 $p = w\rho$ を仮定すると

$$a^{3(1+w)}\rho = const. = a_0^{3(1+w)}\rho_0$$

下添え字の 0 は現在の値であることを表す。臨界密度（空間平坦な一様等方宇宙モデルにおける全エネルギー密度）ρ_c や密度パラメータ $\Omega_i \equiv \rho_i/\rho_c$ を用いると (5)、(6) から次の方程式が導かれる。

$$\dot{x}^2 + V(x) = 0 \quad : x = \frac{a}{a_0} \tag{7}$$

$V(x)$ は次で与えられる有効ポテンシャルである。

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\lambda}{12}x^2[(1 + \beta_0 \sum_i \Omega_{0i}x^{-3(1+\omega_i)})^{-2} - 1] \\ &\quad with \ \ \beta_0 = \left(1 - \frac{12H^2}{\lambda}\right)^{-1/2} - 1 \end{aligned}$$

この方程式の解の振る舞いについて考察する。1 成分のみを考えると $w > -1$ ならば宇宙初期、つまり $a(t) \sim 0$ について

$$\begin{aligned} & V(x) \sim \frac{-\lambda}{12}x^2 \quad (x \sim 0 \Leftrightarrow a \sim 0) \\ & \Longrightarrow \dot{x}^2 = \frac{\lambda}{12}x^2 \\ & \Longrightarrow a(t) \propto \exp\left[\sqrt{\frac{\lambda}{12}}t\right] \equiv \exp\left[H_{\max}t\right] \end{aligned}$$

最後の等式については、この理論における Habble パラメータの取りうる最大値が $\sqrt{\frac{\lambda}{12}}$ になっていることを明示した。実際、torsion scalar は一様等方宇宙において $T = -6H^2$ であるので作用の形から

$$-\frac{2T}{\lambda} < 1 \Longleftrightarrow \frac{12H^2}{\lambda} < 1$$

となることからわかる。
導いた式から宇宙初期において加速膨張が実現していることがわかる。しかも w が正の値でもこれは変わらない。また修正 Teleparallel 重力の一つの特徴として初期特異点がなくなっている。
宇宙初期で輻射優勢 (つまり $w = 1/3$) だとして $a(t)$ の振る舞いを $\alpha = H_{\max}/H_0$ で分けたものが図 1 である。宇宙初期以降は加速が収まり Hubble パラメー

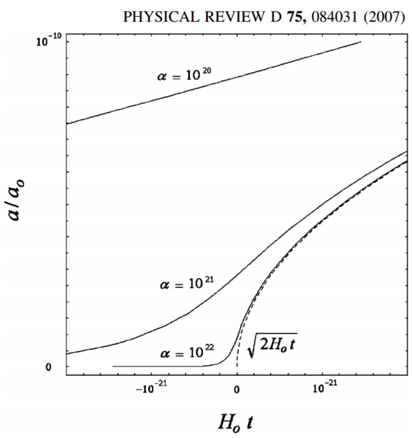

図 1: scale factor の振る舞い (点線は GR の結果)

タは小さくなるので

$$12H^2 \ll \lambda \Longleftrightarrow -2T \ll \lambda$$

となり GR に帰着する。つまりインフレーションは自動的に終わる。
インフレーションが終わって GR に帰着する時刻はパラメータ λ に依存する。GR は元素合成の説明に成功しているので元素合成が始まる時刻 (redshift に換算して $z_{\rm nuc}$ とおく) までにインフレーションは終わらなければならない。このことから λ の値を制限することができる。一成分が優勢な場合の GR の Hubble パラメータの振る舞いは

$$\log\frac{H}{H_0} = \frac{3}{2}(1 + w)\log(1 + z)$$

ここで z は redshift である。これより GR と修正 Teleparallel 重力が接続する時刻 (z_t とおく) は大体

$$(1+z_t)^{\frac{3(1+w)}{2}} = \frac{H_{\max}}{H_0}$$

である。この時刻が元素合成よりはるかに早いという条件から輻射優勢の場合

$$z_t \gg z_{\rm nuc} \quad \sim \quad 10^9 - 10^{10} \tag{8}$$

$$\Longrightarrow \frac{H_{\max}}{H_0} \quad = \quad \sqrt{\frac{\lambda}{12}}\frac{1}{H_0} \gg 10^{18} \tag{9}$$

という式が成り立つ。各 α ごとの Hubble パラメータの振る舞いを GR と比較したものが図 2 である。実際にこの範囲で元素合成以前にインフレーション

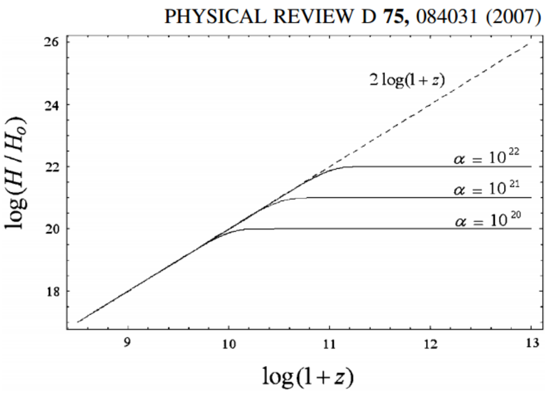

図 2: Hubble パラメータの振る舞い (点線は GR の結果)

が終わり GR に帰着していることがわかる。

Reference

Rafael Ferraro, & Franco Fiorini 2007, PHYSICAL REVIEW **D75**,084031