Large gauged Q-balls with regular potential

吉持 祐佳里 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

大域的な U(1) 対称性を持つスカラー場の模型では、Q-balls と呼ばれる球状の非位相的なソリトン解が存在することが知られており、ダークマターの正体とバリオン数非保存の問題を解決する糸口として期待されている。U(1) 対称性をゲージ化すると、電荷の大きさはクーロン斥力によって上限が生じる。レビューを行う論文は、あるポテンシャルの下では電荷の上限のない解は存在し、電荷が大きくなると配位は殻型になるという結果を得た。また Q-balls は場が安定になっている配位だが、不安定解の配位があることも見つけた。

1 Introduction

大域的な U(1) 対称性を含むスカラー場の模型では、Q-balls と呼ばれる球状の非位相的なソリトン解が存在することが知られている。またバリオン数非保存の問題を解決しうる模型として、超対称性を課した素粒子標準模型からなる Affleck-Dine 機構があり、スカラー場のゆらぎによって Q-balls が生じる。Q-balls 自身はダークマターの候補であり、Q-balls は宇宙におけるダークマターの正体とバリオン数非保存の問題を解決する糸口として大いに期待されている。

超対称性粒子は電荷や色荷を持つので、Q-balls の拡張例としてスカラー場に局所的 U(1) 対称性を持ったゲージ場を入れた研究がなされた。その結果クーロン斥力によってその電荷の大きさは上限が生じるということが知られている。電荷に上限のない模型としてよく知られているものに、V の形をした線形のポテンシャルの模型があるが、それは $\phi = 0$ が特異点となってしまう。

2 Q-balls

SO(2) 対称性を持つスカラー場 $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ の作用は、$\phi \equiv \phi_1^2 + \phi_2^2$ とすると

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \right] \tag{1}$$

となり、その Noether charge は

$$Q \equiv \int d^3x \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) \tag{2}$$

となる。球対称性と一様な位相回転 $\phi = \phi(r)(\cos\omega t, \sin\omega t)$ を仮定し、作用を場の E-L 方程式に当てはめると

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} + \omega^2\phi = \frac{dV}{d\phi} \tag{3}$$

というスカラー場の方程式が得られる。これはポテンシャルが $V_\omega = V - (\omega^2\phi^2)/2$ を 1 成分の持つスカラー場の方程式と等しい。

$$\min(V_\omega) < V_\omega(0), \qquad \frac{d^2V_\omega}{d\phi^2}(0) > 0 \tag{4}$$

という状態を考えると、

$$\min\left[\frac{2(V - V(0))}{\phi^2}\right] < \omega^2 < m^2 \equiv \frac{d^2V}{d\phi^2} \tag{5}$$

と言う条件が課せられる。また以下の境界条件

$$\left.\frac{d\phi}{dr}\right|_{r=0} = 0, \qquad \phi|_{r\to\infty} = 0 \tag{6}$$

を持つ平衡解 $\phi(r)$ が存在し、これこそが Q-ball である。r を時間、$\phi(r)$ を質点の位置と見做すと、Q-balls の解は図 1 のようなニュートン力学的なものになる。点粒子が $r \to \infty$ で原点に上りつめる為には

$$\lim_{\phi\to+0}\frac{1}{\phi}\left(-\frac{dV_\omega}{d\phi}\right) = \lim_{\phi\to+0}\frac{1}{\phi}\left(\omega^2\phi - \frac{dV}{d\phi}\right) < 0 \tag{7}$$

という条件が課せられる。

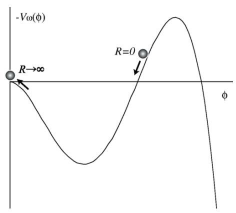

図 1: Q-balls とニュートン力学における点粒子の運動

3　gauged Q-balls

スカラー場に局所的な U(1) 対称性を持つゲージ場を導入する。すると作用は

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} D_\mu \phi D_\nu \phi - V(\phi) \right] \tag{8}$$

となる。$A_0 = A(r)$、$A_i = 0\,(i = 1, 2, 3)$ とすると、場の E-L 方程式は以下の通りである。

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} d\phi dr + \Omega^2 \phi = \frac{dV}{d\phi}, \tag{9}$$

$$\frac{d^2\Omega}{dr^2} + \frac{2}{r} d\Omega dr = \Omega (q\phi)^2 \tag{10}$$

境界条件は (6) だけではなく、(9) も加えられる。ただし C は定数である。

$$\left. \frac{d\Omega}{dr} \right|_{r=0} = 0, \qquad \Omega|_{r\to\infty} = \omega + \frac{C}{r} \tag{11}$$

エネルギー運動量テンソルは

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} =& D_\mu \phi_a D_\nu \phi_a - \eta_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (D_\lambda \phi_a)^2 + V \right] \\ & + F_{\mu\lambda} F^{\lambda}{}_{\nu} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} (F_{\lambda\sigma})^2 \end{aligned} \tag{12}$$

となるので、エネルギーと電荷は

$$E = 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \left[\Omega^2 \phi^2 + \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)^2 + 2V \right], \tag{13}$$

$$Q = 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \Omega \phi^2 \tag{14}$$

となる。また (7) は

$$\lim_{\phi\to+0} \frac{1}{\phi} \left(-\frac{dV_\Omega}{d\phi} \right) = \lim_{\phi\to+0} \frac{1}{\phi} \left(\Omega^2 \phi - \frac{dV}{d\phi} \right) < 0 \tag{15}$$

となる。

4　V_4 model

自然なポテンシャルの下で gauged Q-balls について考える。例として

$$V_4(\phi) \equiv \frac{m^2}{2} \phi^2 - \lambda \phi^4 + \frac{\phi^6}{M^2}, \quad m^2, \lambda, M^2 > 0 \tag{16}$$

という V_4 ポテンシャルの下、gauged Q-balls について考察する (K.Lee et al. 1989)。すると (15) から

$$\lim_{r\to\infty} \Omega^2 < m^2 \tag{17}$$

というより強い条件が出る。つまり平衡解存在する範囲が限られ、(14) から電荷に上限が課せられた。

5　電荷に上限のないポテンシャル

電荷 Q に上限がつくのは、(15) によるものであろう。そこで

$$\lim_{\phi\to+0} \frac{1}{\phi} \frac{dV}{d\phi} = \infty \tag{18}$$

という条件を考えると、(15) によって Ω は束縛されない。また $\phi = 0$ において

$$\lim_{\phi_1\to+0} \frac{\partial V}{\partial \phi_1} = \lim_{\phi_1\to-0} \frac{\partial V}{\partial \phi_1}, \qquad \phi_2 = 0 \tag{19}$$

とする。するとここから

$$\lim_{\phi\to+0} \frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{20}$$

という条件式が得られる。(18) (20) を満たすポテンシャルを考えることで、電荷 Q に上限がなくなると考えられる。$\phi \equiv 0$ での最も効力のある項は $V_0(\phi)$ であることを念頭に置き、今回は以下の 2 つのポテンシャルについて考えた。

5.1　V 型ポテンシャル

$$V_0 = K\phi^\alpha \tag{21}$$

α は正の実数で、ポテンシャルとする。

$$\frac{1}{\phi} \frac{dV_0}{d\phi} = K\alpha\phi^{\alpha-2} \tag{22}$$

となるので、(18) (20) を満たす為には

$$1 < \alpha < 2, \qquad K > 0 \tag{23}$$

となる。

5.2 Log ポテンシャル

$$V_0 = K\phi^{\alpha}\left(\log\frac{\phi}{M}\right)^n \tag{24}$$

α は正の実数、n は自然数で、正のポテンシャルとする。

$$\frac{1}{\phi}\frac{dV_0}{d\phi} = K\phi^{\alpha-2}\left(\log\frac{\phi}{M}\right)^{n-1}\left(\alpha\log\frac{\phi}{M}+n\right)$$
$$\approx K\alpha\phi^{\alpha-2}\left(\log\frac{\phi}{M}\right) \tag{25}$$

となるので、(18) (20) を満たすためには

$$1<\alpha\le 2, \tag{26}$$
$$\{n \text{ is odd}, K<0\} \text{ or } \{n \text{ is even}, K>0\}$$

となる。

6 V_V model

$$V_V(\phi) \equiv \lambda\frac{|\phi|}{\sqrt{2}} \tag{27}$$

という V_V ポテンシャルの下、gauged Q-balls について考察する。$\lambda>0$ であれば (15) を満たす。$\kappa\equiv q\lambda/\sqrt{2}$ として規格化を行い、以下 $\tilde{\phi}$ のように表示する。そして $\tilde{Q}=120$ として $\tilde{\phi}$ と $\tilde{\Omega}$ として、通常の Q-balls と gauged Q-balls 数値計算を行った。その結果が図 2 である。

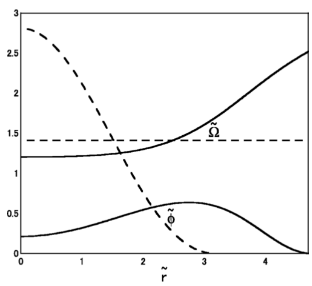

図 2: V_V model で $Q=120$ のときの $\tilde{\phi}$ と $\tilde{\Omega}$ の形状

ダッシュが通常の Q-balls の解を表し、実線が gauged Q-balls の解である。図 2 を見ると、gauged Q-balls では、$\tilde{\phi}$ の最大値が $\tilde{r}\neq 0$ となっている。$\tilde{\phi}$ の最大値が $\tilde{r}\neq 0$ の時、Q-shells と呼ばれ場の配位は殻型になるだけで Q-balls の球の形壊さないことが分かっている (H.Arodz & J.Lis 2009)。またこのときの $\tilde{Q}$-$\tilde{E}$ の関係性を図 3 に示す。

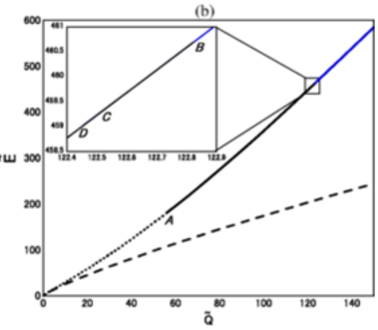

図 3: V_V model での $\tilde{Q}$-$\tilde{E}$ の関係性

ダッシュの線が通常の Q-balls を、ドットの実線が gauged Q-balls ($\tilde{r}_{\max}=0$) を、黒の実線が gauged Q-balls ($\tilde{r}_{\max}\neq 0$) を、青の実線が Q-shells を表している。図 3 を見ると gauged Q-balls では、場の配位は殻型になり電荷 Q に上限がなくなったことがわかった。

7 Log model

(25) (26) より、簡単のため $\alpha=2$、$n=1$ つまり $K<0$ というポテンシャルについて考える。regular mass term を導入すると、ポテンシャルは以下のように書き表せる。

$$V_{\log} = \frac{\mu^2}{2}\phi^2\left[1+K\phi^2\log\left(\frac{\phi}{M}\right)\right] \tag{28}$$

$K=-1$ のときを図 4 に、$K=-0.4$ のときを図 5 に示した。

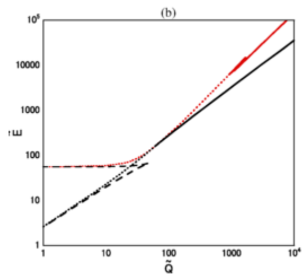

図 4: $K=-1$ での $\tilde{Q}$-$\tilde{E}$ の関係性

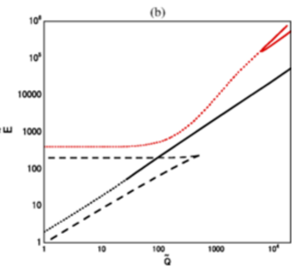

図 5: $K = -0.4$ での $\tilde{Q}$-$\tilde{E}$ の関係性

黒色のダッシュの線が通常の Q-balls を、黒色のドットの実線が gauged Q-balls ($\tilde{r}_{\max} = 0$) を、黒の実線が gauged Q-balls ($\tilde{r}_{\max} \neq 0$) を、赤色のドットの実線が gauged Q-balls ($\tilde{r}_{\max} = 0$) を、赤の実線が gauged Q-balls ($\tilde{r}_{\max} \neq 0$) を表している。その結果電荷 Q の上限はなくなったことがわかる。また $|K|$ の値が小さくなるにつれて不安定な解と安定解が近づくという結果を得た。Q-balls はスカラー場が安定になっている配位だが、ポテンシャルのパラメータ K に依存しており、不安定解の配位があるということもわかった。ここで $K = -1.06$ と $K = -1.07$ の場合について数値計算を行い、それぞれ図 6、図 7 に示す。

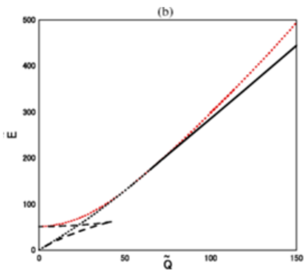

図 6: $K = -1.06$ での $\tilde{Q}$-$\tilde{E}$ の関係性

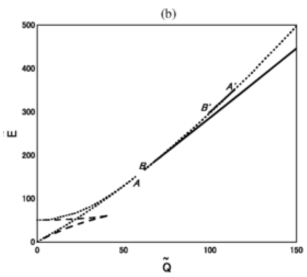

図 7: $K = -1.07$ での $\tilde{Q}$-$\tilde{E}$ の関係性

$K = -1.06$ では、$K = -1.0$ のときよりも安定解と不安定解が漸近しており、$K = -1.07$ のときは、安定解と不安定解が離れてしまうという結果を得た。したがって $|K|$ 大きくなると、安定解と不安定解が漸近し、最終的に $-1.07 < K < -1.06$ の領域で 2 つの解の再結合が起こることが分かった。

8 Conclusion

$V = (\mu^2/2)\phi^2[1 + K\phi^2 \log(\phi/M)]$ というポテンシャルを持つ模型を考え、そのソリトン解について調べた。その結果、電荷が大きくなるにつれてクーロン斥力によって電荷を持ったスカラー場は表面上に集まり、配位は殻型になることが分かった。これは Q-shells と呼ばれ、殻上に電荷が分布する性質は V の形をした線形のポテンシャルの模型のものと類似している。また Q-balls はスカラー場が安定になっている配位だが、ポテンシャルのパラメータ K に依存しており、不安定解の配位があるという結果も得た。$|K|$ が大きくなると、安定解と不安定解が漸近し、最終的に $1.07 < |K| < 1.06$ の領域で 2 つの解の再結合が起こることも分かった。

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号：YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。

Reference

K.Lee, J.A.Stein-Schabes, R.Watkins, & L.W.Widrow 1989, Phys. Rev D39, 1665.

H.Arodz, & J.Lis 2009, Phys.Rev. D79 045002 arXiv:0812.3284 [hep-th].

T.Tamaki, & N.Sakai 2014, Phys.Rev. D90 085022.