gauge 場と 2-form 場が在るときのインンフレーション宇宙の厳密解

伊藤 飛鳥 (神戸大学 素粒子宇宙理論研究室)

Abstract

インフラトンとカップリングしている gauge 場と 2-form 場が存在するときのインフレーション宇宙について考察する。特にインフラトンのポテンシャル関数と gauge 場、2-form 場のカップリング関数が exponential 型のときを考える。この仮定のもとで、先行研究から gauge 場と 2-form 場を含まない場合は isotropic power-law solution が、gauge 場のみの場合は anisotropic power-law solution が存在することが知られている。これらは厳密解である。本研究では 2-form 場のみを含む場合にも anisotropic power-law solution が存在することを示した後に、両方の場を含む場合についても厳密解が存在することを示す。さらに解の周りの安定性について議論するために fixed point 探す。fixed point は 4 つあることが明らかになり、そのそれぞれが 4 つの厳密解に対応することが示される。最後に、それぞれの点での安定性を調べることによって、インフレーション宇宙がどの解に収束するのかは結合定数によって決定されることが明らかになる。

1 Exact power-law solutions

次のような作用を考える。

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_p^2}{2}R - \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}\bar{f}_A{}^2(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{12}\bar{f}_B{}^2(\phi)H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}\right] , \quad (1)$$

ここで場の強さ $F_{\mu\nu}$ と $H_{\mu\nu\lambda}$ は $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$、$H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu}$ のように定義されている。さらにそれぞれの関数型を以下のようにとる。

$$V(\phi) = V_0 e^{\lambda\frac{\phi}{M_p}} , \quad (2)$$

$$\bar{f}_A(\phi) = f_A\ e^{\rho_A\frac{\phi}{M_p}} , \qquad \bar{f}_B(\phi) = f_B\ e^{\rho_B\frac{\phi}{M_p}} . \quad (3)$$

ここで $A_\mu = (0, v_A(t), 0, 0)$, $\frac{1}{2}B_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = v_B(t)dy \wedge dz$ ととる。すると y-z 平面の対称性より計量を次のような形に制限できる。

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha(t)}\left[\ e^{-4\sigma(t)}dx^2 + e^{2\sigma(t)}(dy^2 + dz^2)\right] , \quad (4)$$

このとき運動方程式は

$$\dot{v}_A = p_A f_A^{-2} e^{-2\rho_A\frac{\phi}{M_p}} e^{-\alpha-4\sigma} , \qquad \dot{v}_B = p_B f_B^{-2} e^{-2\rho_B\frac{\phi}{M_p}} e^{\alpha+4\sigma} , \quad (5)$$

$$\dot{\alpha}^2 = \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{3M_p}\left[\ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V_0 e^{\lambda\frac{\phi}{M_p}} + \frac{1}{2}p_A^2 f_A^{-2} e^{-2\rho_A\frac{\phi}{M_p}} e^{-4\alpha-4\sigma} + \frac{1}{2}p_B^2 f_B^{-2} e^{-2\rho_B\frac{\phi}{M_p}} e^{-2\alpha+4\sigma}\right] , \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha} &= -3\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{M_p^2}V_0 e^{\lambda\frac{\phi}{M_p}} + \frac{1}{6M_p^2}p_A^2 f_A^{-2} e^{-2\rho_A\frac{\phi}{M_p}} e^{-4\alpha-4\sigma} + \frac{1}{3M_p^2}p_B^2 f_B^{-2} e^{-2\rho_B\frac{\phi}{M_p}} e^{-2\alpha+4\sigma} , \quad (7)\\
\ddot{\sigma} &= -3\dot{\alpha}\dot{\sigma} + \frac{1}{3M_p^2}p_A^2 f_A^{-2} e^{-2\rho_A\frac{\phi}{M_p}} e^{-4\alpha-4\sigma} - \frac{1}{3M_p^2}p_B^2 f_B^{-2} e^{-2\rho_B\frac{\phi}{M_p}} e^{-2\alpha+4\sigma} , \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\ddot{\phi} = -3\dot{\alpha}\dot{\phi} - \frac{\lambda}{M_p}V_0 e^{\lambda\frac{\phi}{M_p}} + \frac{\rho_A}{M_p}p_A^2 f_A^{-2} e^{-2\rho_A\frac{\phi}{M_p}} e^{-4\alpha-4\sigma} + \frac{\rho_B}{M_p}p_B^2 f_B^{-2} e^{-2\rho_B\frac{\phi}{M_p}} e^{-2\alpha+4\sigma} \ . \tag{9}$$

となっている。p_A, p_B は積分定数である。power-law solution を探すために以下のようにおく。

$$\alpha = \zeta \log M_p t \ , \qquad \sigma = \eta \log M_p t \ , \qquad \frac{\phi}{M_p} = \xi \log M_p t + \phi_0 \ , \tag{10}$$

ただし ζ, η, ξ, ϕ_0 は定数。詳細は割愛するがこれらを運動方程式に代入して、計算すると次の厳密解が得られる。

$$\xi = -\frac{2}{\lambda} \ , \tag{11}$$

$$\zeta = \frac{2}{3}\frac{\lambda + \rho_A + \rho_B}{\lambda} \ , \tag{12}$$

$$\eta = \frac{1}{6}\frac{-\lambda + 2(\rho_A - 2\rho_B)}{\lambda} \ . \tag{13}$$

$$u = \frac{1}{2}\frac{\lambda(2\rho_A + 3\rho_B) + 2(2\rho_A^2 + 2\rho_B^2 + \rho_A\rho_B) + 4}{\lambda^2} \ , \tag{14}$$

$$w = \frac{\lambda^2 - 4 + \lambda(2\rho_A - \rho_B) + 2\rho_B(\rho_A - 2\rho_B)}{\lambda^2} \ , \tag{15}$$

$$z = \frac{1}{2}\frac{3\lambda^2 - 8 + 4\lambda(\rho_A + \rho_B) - 4\rho_A(\rho_A - 2\rho_B)}{\lambda^2} \ . \tag{16}$$

ここで

$$u = \frac{1}{M_p^4}V_0 e^{\lambda\phi_0} \ , \qquad w = \frac{1}{M_p^4}p_A^2 f_A^{-2} e^{-2\rho_A\phi_0} \ , \qquad z = \frac{1}{M_p^4}p_B^2 f_B^{-2} e^{-2\rho_B\phi_0} \ . \tag{17}$$

とそれぞれ定義された量である。w と z は定義より正なので

$$\lambda^2 - 4 + \lambda(2\rho_A - \rho_B) + 2\rho_B(\rho_A - 2\rho_B) > 0 \ , \tag{18}$$

$$3\lambda^2 - 8 + 4\lambda(\rho_A + \rho_B) - 4\rho_A(\rho_A - 2\rho_B) > 0 \ . \tag{19}$$

がこの解が存在するための条件となっている。

2 Fixed points

Fixed point を探すために次のような変数を定義する。

$$X = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\alpha}} \ , \quad Y = \frac{1}{M_p}\frac{\dot{\phi}}{\dot{\alpha}} \ , \tag{20}$$

$$Z_A = \frac{1}{M_p\dot{\alpha}}p_A f_A^{-1} e^{-\rho_A\frac{\phi}{M_p}} e^{-2\alpha-2\sigma} \ , \quad Z_B = \frac{1}{M_p\dot{\alpha}}p_B f_B^{-1} e^{-\rho_B\frac{\phi}{M_p}} e^{-\alpha+2\sigma} \ . \tag{21}$$

これらを用いて運動方程式は

$$\frac{dX}{d\alpha} = X[\ 3(X^2 - 1) + \frac{1}{2}Y^2\ ] + \frac{1}{3}Z_A^2(X + 1) + \frac{1}{6}Z_B^2(X - 2) \ , \tag{22}$$

$$\frac{dY}{d\alpha} = (Y + \lambda)[\ 3(X^2 - 1) + \frac{1}{2}Y^2\ ] + (\frac{1}{3}Y + \rho_A + \frac{\lambda}{2})Z_A^2 + (\frac{1}{6}Y + \rho_B + \frac{\lambda}{2})Z_B^2 \ , \tag{23}$$

$$\frac{dZ_A}{d\alpha} = Z_A[\ 3(X^2 - 1) + \frac{1}{2}Y^2 - \rho_A Y + 1 - 2X + \frac{1}{3}Z_A^2 + \frac{1}{6}Z_B^2\ ] \ , \tag{24}$$

$$\frac{dZ_B}{d\alpha} = Z_B[\ 3(X^2 - 1) + \frac{1}{2}Y^2 - \rho_B Y + 2 + 2X + \frac{1}{6}Z_B^2 + \frac{1}{3}Z_A^2\ ] \ . \tag{25}$$

とかかれる。Fixed point はこれらの左辺を 0 とおくと得られる。式 (24),(25) に着目すると、Z_A, Z_B のそれぞれが 0 かどうかで場合分けできることがわかる。詳細は省略するが、$Z_A = Z_B = 0$ は isotropic power-law solution(gauge 場と 2-form 場がないときの厳密解) に、$Z_A \neq 0, Z_B = 0$ と $Z_A = 0, Z_B \neq 0$ はそれぞれの anisotropic power-law solution(gauge 場のみのときと 2-form 場のみのそれぞれの厳密解) に一致している。さらに $Z_A \neq 0, Z_B \neq 0$ のとき、Fixed point は (22)〜(25) より

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{1}{4}\frac{-\lambda + 2(\rho_A - 2\rho_B)}{\lambda + \rho_A + \rho_B}\ , && (26)\\
Y &= -3\frac{1}{\lambda + \rho_A + \rho_B}\ , && (27)\\
Z_A^2 &= \frac{9}{4}\frac{\lambda^2 - 4 + \lambda(2\rho_A - \rho_B) + 2\rho_B(\rho_A - 2\rho_B)}{(\lambda + \rho_A + \rho_B)^2}\ , && (28)\\
Z_B^2 &= \frac{9}{8}\frac{3\lambda^2 - 8 + 4\lambda(\rho_A + \rho_B) - 4\rho_A(\rho_A - 2\rho_B)}{(\lambda + \rho_A + \rho_B)^2}\ . && (29)
\end{aligned}
$$

となっておりこれは前節の厳密解に一致する。さらに (28),(29) よりこの fixed point が存在する条件は条件 (18) と (19) にと等しいことがわかる。

3 Stability

式 (22)〜(25) をそれぞれの fixed point のまわりに 1 次の摂動に展開して安定性を考えるとインフレーション宇宙ががどの fixed point(常に 4 つあるとは限らない) に収束するのかは結合定数 λ, ρ_A, ρ_B で決定されることがわかる。まず gauge fixed point が安定となる条件は

$$\rho_A > \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2}\lambda\ . \tag{30}$$

次に 2-form fixed point が安定となる条件は

$$\rho_B > \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}\lambda\ . \tag{31}$$

さらに hybrid fixed point が安定となる条件は (18),(19) である。これらのパラメータ領域を 3 次元図に描いたものが図 1 である。図 1 を見れば、インフレーション宇宙がどの解に収束するのかがわかる。

最後に、1〜3 節とも厳格な議論をせず、詳細も省いてあるので詳しくは参考文献を参照のこと。

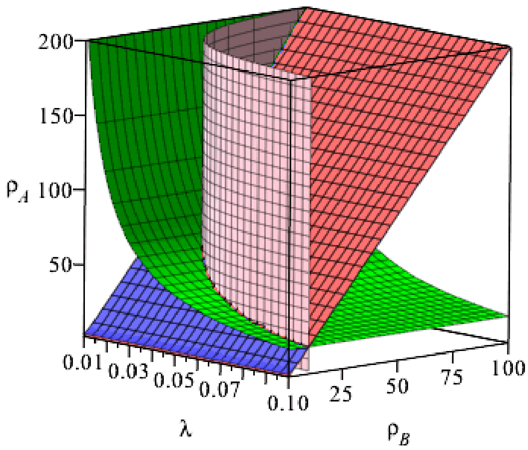

図 1: The blue curved surface represents $\lambda^2 - 4 + \lambda(2\rho_A - \rho_B) + 2\rho_B(\rho_A - 2\rho_B) = 0$. The red curved surface is $3\lambda^2 - 8 + 4\lambda(\rho_A + \rho_B) - 4\rho_A(\rho_A - 2\rho_B) = 0$. The green curved surface is $\lambda^2 + 2\rho_A\lambda - 4 = 0$. And the pink curved surface represents $\lambda^2 + 2\rho_B\lambda - 2 = 0$. These four curved surfaces exactly intersect on a curved line. Below the red surface and above the blue surface, there are four fixed points of which only the hybrid fixed point is an attractor. Above the red surface and right of the pink surface, the gauge fixed point is an attractor and the isotropic and two-form fixed points are saddle points. Left of the pink surface and above the green surface, the gauge fixed point is an attractor and the isotropic fixed point is a saddle point. Below the blue surface and above the green surface, the two-form fixed point is an attractor and the isotropic and the gauge fixed points are saddle points. Below the green surface and right of the pink surface, the two-form fixed point is an attractor and the isotropic fixed point is a saddle point. Below the green surface and left of the pink surface, only the isotropic fixed point exists and stable.

4 Acknowledgment

I would like to thank the members of the committee and the Yukawa Institute for Theoretical Physics at Kyoto University for holding YITP workshop YITP-W-15-04 on ”Summer School on Astronomy and Astrophysics 2015”.

Reference

A. Ito and J. Soda, “Designing Anisotropic Inflation with Form Fields,” arXiv:1506.02450 [hep-th].