インフレーション中のQED における非摂動効果の研究と原始磁場形成理論への応用

林中 貴宏 (東京大学大学院 理学系研究科附属ビッグバン宇宙国際研究センター)

Abstract

衛星観測によって宇宙の大規模磁場の存在が示唆されるようになり、その起源を初期宇宙で起こったインフレーション中の量子ゆらぎに求める、原始磁場形成理論が長らく議論されてきた。しかし、このような理論では磁場ではなく、電場のほうが大きくなってしまうことが知られており、原始磁場形成理論はうまくいかないと考えられてきた。しかし、この電場のエネルギー密度は、インフラトンのエネルギー密度程度まで成長し、質量 m の粒子が Schwinger 効果で生成する典型的な電場のスケール $eE \sim m^2$ を超える可能性があると考えられる。Schwinger 効果による粒子生成が効率的に起これば、インフレーション中の真空の電気伝導度が十分に上がり、電場を消すことができる。したがってこの可能性が妥当なものであるかどうか研究することは重要である。ただし、Schwinger 効果は典型的な非摂動効果であるため、取り扱いは難しい。

本講演では場の理論における粒子対生成を、微分方程式における解の Stokes 現象と関連させて俯瞰し、準古典的な解析によって Schwinger 効果を取り扱えるかを議論する。

1 イントロ

1.1 宇宙の大規模磁場

銀河間スケールの磁場は弱く、シンクロトロン放射やファラデー回転のような古典的な手法とは異なる方法で検出される。その手法は Plaga の方法 [1, 2] と呼ばれ、突発的に明るく光る天体からの高エネルギー γ 線を用いて次のような原理で磁場を測定する。

まず、遠方の天体から突発的に発せられる 1TeV 程度のエネルギーの γ 線を測定することを考える。このような高いエネルギーの γ 線の一部は、地球に届く前に背景放射との相互作用によって、電子・陽電子対生成を起こす。対生成で出てくる粒子も 500GeV 程度の高いエネルギーを持つので、元の光子とほぼ同じ向きに進む。続いて、この電子・陽電子対による逆コンプトン散乱で CMB 光子が散乱され 1GeV 程度のエネルギーを持って地球まで到達する。散乱されて届く GeVγ 線はそのまま届く TeVγ 線よりも余分に長い経路を通ってくるので、地球に届く頃には $\sim$ 300s 程度の時間差が生じる。このような現象自体は宇宙磁場がなくても起こる。

一方、宇宙磁場が存在する場合には、TeVγ 線が電子・陽電子対になって伝播する過程に影響を及ぼす。磁場によって荷電粒子の軌道が曲げられるため、観測される GeVγ 線の到達時間の遅れは磁場が存在しない場合に比べてより大きくなる。従って、2 次 GeVγ 線が観測されない場合には、宇宙磁場の強度に下限を与えることになる。実際 Fermi 衛星での観測から既に Mpc スケールにおいて $|B_0| > 10^{-15} \sim 10^{-20}$G 程度の下限が付けられている [3, 4, 5, 6]。

このような磁場の起源をインフレーション中の電磁場の量子論的なゆらぎに求めるのが、原始磁場形成理論である。このような理論においては、しばしば、電場が非常に強くなるため、Schwinger 効果のような真空からの粒子生成が起こる可能性がある。

1.2 Schwinger 効果

まず、Minkowski 時空の場合の議論を簡単に振り返っておく。1951 年の Schwinger による論文 [7] では、電磁場と電子･陽電子の相互作用を記述する QED の Lagrangian から、電磁場に対する繰り込まれた低エネルギー有効 Lagrangian を決定した。一様な電場

だけがある場合 ($\mathcal{F}=-\frac{1}{2}E^2,\ \mathcal{G}=0$) には

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}E^2-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{s^3}\mathrm{e}^{-m^2s}\times \Big[eEs\cot(eEs)+\frac{1}{3}(es)^2\mathcal{F}-1\Big] \tag{1}$$

と計算できる。ここで、e,m は電子･陽電子の電荷と質量であり、$\mathcal{F}\equiv\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{E}^2),\ \mathcal{G}\equiv\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ である。この Lagrangian の第一項は通常の Maxwell Lagrangian であり電磁場の運動項を記述する。第二項以降が電磁場の相互作用を表す項になっている。これは次数の無限に高い項まで含んだ、完全に非摂動的な形式である。$\cot(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{z+n\pi}$ という展開を用いると s 積分の極が $s=s_n=\frac{n\pi}{eE}$ にあることが分かる。積分路を $s\to s+i\epsilon$ とずらすと、$\frac{1}{x+i\epsilon}=\mathcal{P}\frac{1}{x}-i\pi\delta(x)$ から有効 Lagrangian の虚部を

$$2\Im\mathcal{L}=\frac{(eE)^2}{4\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}n\right) \tag{2}$$

と計算できる。そしてこの値が真空の崩壊率、すなわち、単位時間・単位体積あたりの電子・陽電子対の生成率を与える。このように Schwinger 効果による真空からの粒子対生成を説明することができる。

一方、電磁場が弱いとして有効作用を展開すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2)\\&\quad+\frac{1}{360\pi^2}\frac{e^4}{m^4}\left((\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2)^2+7(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2\right)+\mathcal{O}(e^6)\end{aligned} \tag{3}$$

となる。この展開は、(運動項)+(光子の 4 点の自己相互作用) の形をしており、光子の 非線形の 効果を記述することには成功している。しかし、Lagrangian の虚部は出てこず、粒子生成の効果は全く落ちてしまっていることが分かる。Lagrangian をもっと高次の項まで展開したところで、この事情は一向に変わらない。従って、Schwinger 効果による粒子生成は摂動展開の無限次の項まで考えて初めて分かる 非摂動的な 効果であることが分かる。

2 WKB 解の Stokes 現象と粒子生成

つづいて、Schwinger 効果を粒子の生成という観点から見てみる。非自明な背景場の中での粒子生成は、正負のモードが混ざり合うことで引き起こされる現象である。

一般に場の演算子 $\phi(\eta,\boldsymbol{x})$ は初期時刻における正振動解 ϕ_k^{in} と、異なる時刻における正振動解 ϕ_k^{out} とのどちらによってもモード展開することができる。

$$\begin{aligned}\phi(\eta,\boldsymbol{x})&=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}(\phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{in}}(\eta)a_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{in}}+(\phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{in}}(\eta))^*(b_{-\boldsymbol{k}}^{\mathrm{in}})^\dagger)\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}(\phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(\eta)a_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}+(\phi_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}(\eta))^*(b_{-\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}})^\dagger)\end{aligned} \tag{4}$$

この展開が異なる時刻における生成消滅演算子の組 ($a_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{in}},\ a_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{in}\,\dagger},\ b_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{in}},\ b_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{in}\,\dagger}$) と ($a_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}},\ a_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}\,\dagger},\ b_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}},\ b_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}\,\dagger}$) を定める。$\phi_k^{\mathrm{in}}$ や ϕ_k^{out} やその複素共役は、どれも同じ運動方程式の解であるので、これらの間には線形関係が存在し、異なる時刻の生成消滅演算子の間にも線形の関係がある。従って、初期時刻での真空状態を $\forall\boldsymbol{k},\ a_{\boldsymbol{k}}\left|0\right\rangle_{\mathrm{in}}=b_{\boldsymbol{k}}\left|0\right\rangle_{\mathrm{in}}=0$ で定めると、異なる時刻での粒子数演算子 $N\equiv a^\dagger a$ の真空期待値は 0 にならない。

このことは、微分方程式における解の Stokes 現象 (解の漸近形がある領域で急激に変化する現象) として理解できる。Schrödinger 型の微分方程式

$$(\partial_\eta^2+\omega^2(\eta))\phi=0 \tag{5}$$

の WKB 解の場合について考える。WKB 解は、一般には発散する形式級数 $\phi_\pm=\mathrm{e}^{\pm S/\hbar}\sum_{n=0}^{\infty}C_{\pm,\,n}\hbar^{n+1/2}$ ($\hbar$ は小さな展開係数) で与えられる。そこで、一旦異なる級数

$$\phi_{\pm,\,B}(\tau)=\sum_n\frac{C_{\pm,\,n}}{\Gamma(n+1/2)}(\tau+S)^{n-1/2} \tag{6}$$

を考えて (これは ϕ の Borel 変換と呼ばれ、ある定数 $N,\ M$ によって $|C_n|\le NM^nn!$ で抑えられれば収束する)、その Laplace 変換

$$\xi_\pm=\int_{\mp S}^{\infty}\mathrm{d}\tau\mathrm{e}^{-\tau/\hbar}\phi_{\pm,\,B} \tag{7}$$

を WKB 解の Borel 和と呼び、これをもって真の解の性質を調べるという手法を考える。$\phi_\pm$ が収束するとき $\xi_\pm = \phi_\pm$ となる。また、$\phi_\pm$ が収束しなくても $\phi_\pm$ は $\xi_\pm$ の漸近級数になっていることが証明される。

一般に微分方程式の解の漸近展開は複素平面上の特定の領域においてのみ有効であり、異なる領域においては異なる形式解が真の解に漸近するようになることがある。このような現象は微分方程式のストークス現象と呼ばれている。[8] などによって、WKB 解の Borel 和が収束する領域について知られている。結果だけ述べると、WKB 解の Borel 和がうまく定義できるのは、Laplace 変換の中の積分経路が次の式

$$\Im \int_{\eta_c}^{\eta} \mathrm{d}\eta' \sqrt{-\omega^2(\eta')} = 0, \quad (\omega_k(\eta_c) = 0) \tag{8}$$

で定義されるストークス線を横切らないときである。($\Im$ は虚部) ストークス線は転換点 η_c から出て複素平面をいくつかの領域に分割する曲線である。つまり、ストークス線によって分割されたそれぞれの領域 I,II,$\cdots$ に対して異なる WKB 解の Borel 和の組 $\xi_\pm^{\mathrm{I}}, \xi_\pm^{\mathrm{II}}, \cdots$ が定まるということである。

実軸 $\Im\eta = 0$ と交わるストークス線が存在するとき、$\eta = -\infty$ を含む領域 I での解 ξ_-^{I} を実軸に沿ってストークス線を超えて隣の領域 II に解析接続すると、$\xi_\pm^{\mathrm{I}} = \alpha_\pm \xi_\pm^{\mathrm{II}} + \beta_\pm \xi_\mp^{\mathrm{II}}$ のように正振動と負振動のモードが混ざり合う。このようにして WKB 解のストークス現象を理解することができる。Borel 総和法による解析を用いることで、このような、系の大域的な性質を理解できる場合がある。

背景場の中での粒子生成もまた、正負のモードが混ざり合うことで引き起こされる現象であった。そして、WKB 解は Minkowski 時空では正しい真空を与えるモード関数である。そこで、WKB 解 (の Borel 和)$\xi_\pm$ を物理的な真空を与えるモード関数とみなす事にするのは自然な立場の一つだろう。その場合、粒子生成は解のストークス現象そのものであるという主張はほとんど自明なことになる。また、ストークス線と実軸の交点 η_{pc} は粒子の生成時刻を表すとみなせるので、粒子生成のダイナミクスを自然に含む取り扱いになっている。

3 有効作用の虚部

系の全作用 S の内、特定の自由度を scale out して得られる有効作用 Γ は、残された自由度の運動を記述する。scalar QED の場合には $S = S[A_\mu, \phi, \phi^\dagger]$ なので、荷電スカラー場の寄与を scale out すると、電磁場に対する有効作用 $\Gamma = \Gamma[A_\mu]$ が得られる。初期時刻と終時刻における真空状態をそれぞれ $|0;\mathrm{ini}\rangle$, $|0;\mathrm{fin}\rangle$ とすると、Path integral によって

$$\mathrm{e}^{i\Gamma} = \langle 0;\mathrm{fin}|0;\mathrm{ini}\rangle \tag{9}$$

となるので、有効作用の虚部は初期時刻における真空状態の崩壊率ないしは粒子の生成率を与えることがわかる。

ϕ に対する運動方程式が $\hat{F}\phi = 0$ とかけるとき、$\Gamma[A_\mu]$ は $-\ln\det\hat{F}$ を計算して得られる。このような関数 determinant の計算は一般には不可能で、摂動的に計算するしかない。このような量の中の非摂動部分を計算するために、WKB 法によって粒子生成が理解できることに着目する。[9] に従うと、関数 determinant を計算する問題は固有値問題 $\hat{F}\phi = \lambda\phi$ の特別な解を探すことに対応している。$\hat{F} = \partial_t^2 + V(t)$ の場合、$\omega(t) = \sqrt{V(t) - \lambda}$ として構成した WKB 解の Borel 和 ξ_+ を $t = -\infty$ から $t = +\infty$ まで解析接続した際に一般には $\xi_+ \to \alpha\xi_+ + \beta\xi_-$ となるが、接続係数 α, β を求めることが本質である。$\lim_{t\to-\infty} \phi/\xi_+ = 1$ となる解 $\phi(t,\lambda)$ に対して、$a(\lambda) \equiv \lim_{t\to\infty} \phi/\xi_+$ という量 (Jost 関数) を考えると、λ が $\hat{F}$ の固有値になる場合には $a = 0$ となるので Jost 関数は本質的には $\det(\partial_t^2 + V - \lambda)$ に等しい事がわかる。

Jost 関数も WKB 展開 $\ln a = \sum a_n \hbar^n$ を持つので、Borel 変換 a_B の特異性を調べあげることができれば、Laplace 変換の積分路を変形することで、解析的な表式を得ることができる。このような Borel 変換 a_B の特異性を調べる問題は 80 年代はじめに数学者らによって研究が始められた ([9] や [10])。この技術は今日では Resurgence と呼ばれ、近年では物理学の分野への応用も拓かれ始めた。今後、Resurgence を用いた Schwinger 効果の解析を行うことを考えている。

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号：YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。

Reference

[1] R Plaga. Detecting intergalactic magnetic fields using time delays in pulses of γ-rays. *Nature*, Vol. 374, pp. 430–432, 1995.

[2] Kiyotomo Ichiki, Susumu Inoue, and Keitaro Takahashi. Probing the nature of the weakest intergalactic magnetic fields with the high-energy emission of gamma-ray bursts. *The Astrophysical Journal*, Vol. 682, No. 1, p. 127, 2008.

[3] Andrii Neronov and Ievgen Vovk. Evidence for strong extragalactic magnetic fields from Fermi observations of Tev blazars. *Science*, Vol. 328, No. 5974, pp. 73–75, 2010.

[4] Keitaro Takahashi, Masaki Mori, Kiyotomo Ichiki, and Susumu Inoue. Lower Bounds on Intergalactic Magnetic Fields from Simultaneously Observed GeV-TeV Light Curves of the Blazar Mrk 501. *The Astrophysical Journal Letters*, Vol. 744, No. 1, p. L7, 2012.

[5] Ie. Vovk, A. M. Taylor, D. Semikoz, and A. Neronov. Fermi/LAT Observations of 1ES 0229+200: Implications for Extragalactic Magnetic Fields and Background Light. *The Astrophysical Journal Letters*, Vol. 747, No. 1, p. L14, 2012.

[6] Hiroyuki Tashiro, Wenlei Chen, Francesc Ferrer, and Tanmay Vachaspati. Search for CP violating signature of intergalactic magnetic helicity in the gamma-ray sky. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, Vol. 445, No. 1, pp. L41–L45, 2014.

[7] Julian Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Physical Review*, Vol. 82, No. 5, p. 664, 1951.

[8] Takahiro Kawai and Yoshitsugu Takei. *Algebraic analysis of singular perturbation theory*, Vol. 227. American Mathematical Soc., 2005.

[9] A. Voros. The return of the quartic oscillator. the complex wkb method. *Annales de l'institut Henri Poincare (A) Physique theorique*, Vol. 39, No. 3, pp. 211–338, 1983.

[10] J. Ecalle. Les fonctions resurgentes. *Publ. Math. D'Orsay*, Vol. 05, , 1982.