静的・球対称ブラックホールにおける定常・動径的降着流

古賀 泰敬 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙に存在するブラックホールのまわりには物質が分布し、常にその一部が重力中心へと降着している。ブラックホールへの物質降着の問題は、降着率や潮汐力に対する物質の反応を介して、相対論、宇宙論や天文学などの研究へ広く関連付く。

F.C.Michel(1972)[1] は、シュバルツシルトブラックホールへの球対称、定常な流体の降着流があることを示した。これに対し、E.Chaverra & O.Sarbach（2015）[2] は、一般の球対称、静的ブラックホールにおいても同様な定常流が存在することを、いくつかの仮定のもと示した。後者は重力理論を特定しない点やハミルトニアン解析を用いた点で特徴的である。

本発表ではこの E.Chaverra & O.Sarbach による研究 [2] をレビューする。

1 Introduction

背景時空を静的・球対称なブラックホール時空とし、そのまわりに球対称に分布する流体のテスト場を考え、定常的な降着流を解析する。降着とは、物質がブラックホールの事象の地平面へ落ち込むことを指す。

計量と流体の状態方程式には具体的な形を与えずにいくつかの仮定を課す。そのもとで流体の保存則を解き、定常な降着流の解が存在するかどうかを探る。解析にはハミルトニアン解析と同じ方法を用いる。

2 Assumptions

球対称、静的なブラックホール時空を背景に、流体の球対称、定常的な降着流を考える。仮定は計量（背景時空）へのものと、降着する流体（状態方程式）へのものからなる。

計量：座標を

$$ds^2 = -\alpha(r)^2 N(r) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{N(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{1}$$

ととる。時間的キリングベクトル $\mathbf{k} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ を用いて $\sigma(r) := -\mathbf{g}(\mathbf{k},\mathbf{k}) = \alpha(r)^2 N(r)$ を定義し、以下 (M1)〜(M4) を仮定する。

(M1) $r \to \infty$ のとき、$\alpha(r) \to 1, N(r) \to 1, r^2\sigma'(r) \to 2m (m > 0)$.

(M2) $\sigma(r_H) = 0, \sigma'(r_H), \alpha(r_H) > 0$ となる $r_H (> 0)$ がひとつ存在する。

(M3) すべての $r > r_H$ について、$\alpha, \sigma, \sigma' > 0$.

(M4) すべての $r > r_H$ について、

$$-3 < \frac{(r^2\sigma')'}{r\sigma'} < \frac{m}{r}\frac{9}{8 + \frac{m}{r}} \tag{2}$$

が成り立つ。

流体：流体を完全流体とし、以下の保存則を要請する。

$$dh = Tds + \frac{dp}{n}, \tag{3}$$

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \tag{4}$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{5}$$

T, p, n, h, s はそれぞれ、温度、圧力、粒子数密度、単位粒子あたりのエンタルピーとエントロピーであり、流体素片の四元速度を $\mathbf{u} = u^\mu \partial_\mu$ として、$J^\mu := nu^\mu, T^{\mu\nu} := nhu^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}$ である。ただし、(3) の表式は流体の静止系における微分である。(3)〜(5) より $ds = 0$ を示すことができ、$h = h(s,p) = h(p)$、または $h = h(n)$ と書ける。この状態方程式について以下 (F1)〜(F3) を仮定する。

(F1) $n \to 0$ のとき、$h(n) \to e_0 (e_0 > 0)$.

(F2) すべての $n > 0$ について、$0 < v_s(n) := (\frac{\partial \ln h}{\partial \ln n})^{\frac{1}{2}} < c$.

(F3) すべての $n > 0$ について、$0 \leq W(n) := \frac{\partial \ln v_s}{\partial \ln n} \leq \frac{1}{3}$.

3 Hamiltonian on phase space

(3)〜(5) の積分は以下の問題へと帰着する。

$$F(r,n) := h(n)^2 \left[\sigma(r) + \frac{\mu^2}{r^4 n^2} \right] = const. \tag{6}$$

$$(\mu = const) \tag{7}$$

これは、(r,n) で張られる相空間において、ハミルトニアン $F(r,n)$ を保存する軌道 $n = n(r)$ を求める、ハミルトニアン力学系の問題とみなすことができる。ハミルトニアンベクトル場

$$X_F(r,n) := (\nabla F(r,n))^{\perp} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(r,n)}{\partial n} \\ -\frac{\partial F(r,n)}{\partial r} \end{pmatrix} \tag{8}$$

を導入すると、方程式

$$\frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} r \\ n \end{pmatrix} = X_F(r,n) \tag{9}$$

の積分曲線として、軌道が λ でパラメータ表示される。

4 Hamiltonian analysis

仮定 (M1)〜(M4),(F1)〜(F3) より、この系について以下のことが示される。

臨界点の一意性：$X_F(r_c, n_c) = 0$ となる点 (r_c, n_c) を臨界点という。ある有限な値より大きな $|\mu|$ に対し、いつでもただひとつの臨界点が一意に決まる。

線形化行列の固有値：X_F の臨界点まわりの線形化行列

$$DX_F := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(r_c,n_c)}{\partial r \partial n} & \frac{\partial^2 F(r_c,n_c)}{\partial n \partial n} \\ -\frac{\partial^2 F(r_c,n_c)}{\partial r \partial r} & -\frac{\partial^2 F(r_c,n_c)}{\partial r \partial n} \end{pmatrix} \tag{10}$$

は 2× 2 行列で、$trDX_F = 0, detDX_F < 0$ である。よってその 2 つの固有値 α_+, α_- は実数で $\alpha_+ + \alpha_- = 0$ を満たす。

軌道の大域的振舞：曲線 Γ_1, Γ_2 を定義する。

$$\Gamma_1 : n = n_1(r) \quad s.t. \quad \frac{\partial F(r, n_1(r))}{\partial r} = 0 \tag{11}$$

$$\Gamma_2 : n = n_2(r) \quad s.t. \quad \frac{\partial F(r, n_2(r))}{\partial r} = 0 \tag{12}$$

n_1, n_2 について次のことが成り立つ。

$$\lim_{r \to r_h} n_1(r) = finite, \quad \lim_{r \to \infty} n_1(r) = 0 \tag{13}$$

$$\lim_{r \to r_h} n_2(r) = \infty, \quad \lim_{r \to \infty} n_2(r) = 0 \tag{14}$$

$$\frac{dn_1(r)}{dr} < 0, \quad r > r_H \tag{15}$$

$$\frac{dn_2(r)}{dr} < 0, \quad r > r_H \tag{16}$$

$$\frac{\partial F(r,n)}{\partial r} \gtreqless 0, \quad n \gtreqless n_1(r) \tag{17}$$

$$\frac{\partial F(r,n)}{\partial n} \gtreqless 0, \quad n \gtreqless n_2(r) \tag{18}$$

$$l_- < \frac{dn_2(r_c)}{dr} < \frac{dn_1(r_c)}{dr} < l_+ < 0 \tag{19}$$

ただし、l_+, l_- はそれぞれ線形化行列の正、負の固有値に対応する固有ベクトル e_+, e_- の傾きである。

これらの結果より、このハミルトニアン系の軌道の大域的な振舞は図 1 のようになる。Γ_+, Γ_- は臨界点を通り、そこでの傾きが l_+, l_- となる軌道である。ただし、$x(:= r/r_H), z$ は r, n を無次元化した量、矢印はハミルトニアンベクトル場の向きを表す。

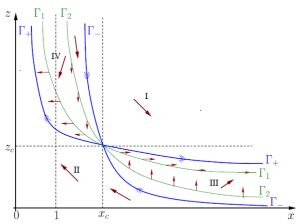

図 1: 臨界点 (x_c, z_c) と軌道 Γ_+, Γ_-([2] より)

5 Conclusion

球対称、静的ブラックホール時空における、球対称、定常的な流体の降着について、計量と状態方程式について具体的な関数形を与えず、いくつかの仮定のもと議論した。基礎方程式には 3 つの保存則を要請し、それをハミルトニアン力学系の問題に帰

着させることで、相空間上の定性的振舞を見た。パラメータ μ の絶対値が十分に大きいとき、相空間における軌道は図 1 のようになることが示され、特にホライズンから無限遠まで良く振る舞う解 Γ_+ の存在がわかった。

Reference

[1] F.C.Michel. Accretion of matter by condensed objects. *Astrophysics and Space Science,* 15:153-160, 1972.

[2] E. Chaverra & O. Sarbach. (2015) ,arXiv:1501.01641