

強重力場周りの円軌道の安定性

鈴木 聡人 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

timelike 粒子の円軌道はその軌道半径に最内安定円軌道 (ISCO:innermost stable circular orbit) と呼ばれる下限がある. 本研究ではこれらのような軌道を marginal stable circular orbits(MSCO) と呼ぶ [Ono et al. (2014)]. MSCO を体系的に調べるために, 静的・球対称時空を仮定して MSCO の半径を導出する方程式を得た. 具体例として Schwarzschild 時空と Kottler(Schwarzschild-de Sitter) 時空の場合で調べた. 得られた方程式に Sturm の定理を用いることで時空のパラメータの変化に応じた MSCO の個数の変化を系統的に調べることができる.

1 背景

Schwarzschild 時空において ISCO が存在することはよく知られており, 天体力学において重要な役割を担っている. 例えば重力波天文学では inspiralling phase と merging phase との境界が ISCO とされている. またブラックホールの降着円盤の内側の縁が ISCO と関係していると考えられている. さらに, ISCO 半径はブラックホールの質量や電荷などのパラメータによって変化するため, 将来 ISCO 半径を測定できればブラックホールの無毛定理の検証に役立つと考えられる.

Schwarzschild 以外の時空では ISCO だけでなく outermost stable circular orbit(OSCO) が存在することがある. そこで本研究ではこれらを合わせて MSCO と呼ぶ. 個々の Einstein 方程式の厳密解について MSCO が調べられているが, 系統立てられた理解は未だに十分ではない.

2 MSCO 方程式の導出

静的・球対称時空の計量を動径座標 r の関数として以下のように示す

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1)$$

ここでは自然単位系 ($G = c = 1$) を用いる. 時空の符号 $(-, +, +, +)$ より $A(r) > 0$, $B(r) > 0$, $C(r) > 0$ である.

Lagrangian を

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &= -A(r)\dot{t}^2 + B(r)\dot{r}^2 + C(r)\dot{\phi}^2, \quad \dot{} \equiv \frac{d}{d\tau}. \end{aligned} \quad (2)$$

とする. Euler - Lagrange 方程式より保存量を以下のように定義する

$$E := -A(r)\dot{t} \quad (3)$$

$$L := C(r)\dot{\phi}. \quad (4)$$

これらから軌道方程式は

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{1}{B(r)} \left(\frac{E^2}{A(r)} - \frac{L^2}{C(r)} - 1 \right) \\ &=: -V(r) \end{aligned} \quad (5)$$

となる.

粒子の軌道が円軌道であるためには $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$ を満たせば良い. また円軌道の安定性が Marginal となるには $d^2V(r)/dr^2 = 0$ であれば良い [L. Rezzolla, & A. Zhidenko (2014)].

これら 3 つの条件を (5) 式に当てはめると以下の方程式を得る

$$\frac{E^2}{A(r)} - \frac{L^2}{C(r)} - 1 = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{A(r)} \right) E^2 - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{C(r)} \right) L^2 = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{A(r)} \right) E^2 - \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{C(r)} \right) L^2 = 0. \quad (8)$$

(6), (7), (8) 式を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{A(r)} & -\frac{1}{C(r)} & -1 \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{A(r)} \right) & -\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{C(r)} \right) & 0 \\ \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{A(r)} \right) & -\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{C(r)} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^2 \\ L^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

となる。左辺は計量 $A(r)$, $C(r)$ と粒子のパラメータ E , L を分離することができている。右辺は成分がすべて 0 の列ベクトルだから、左辺の行列式は 0 でなくてはならない。
よって、MSCO 方程式は

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{A(r)} \right) \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{C(r)} \right) - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{C(r)} \right) \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{A(r)} \right) = 0 \quad (10)$$

となる。この MSCO 方程式は計量 $B(r)$ を含まない。これは (6) 式に $B(r)$ を含まないためである。つまり Timelike な粒子の円軌道には計量の g_{rr} 成分は寄与しない。

また E^2 , L^2 は

$$E^2 = -\frac{1}{\Delta} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{C(r)} \right) \quad (11)$$

$$L^2 = -\frac{1}{\Delta} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{A(r)} \right) \quad (12)$$

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{1}{A(r)} & -\frac{1}{C(r)} \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{A(r)} \right) & -\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{C(r)} \right) \end{vmatrix}$$

となる。

(10) 式の MSCO 方程式の解となる r を (11), (12) 式から得られる E^2 , L^2 に代入したとき, $0 < E^2 <$

∞ , $0 < L^2 < \infty$ を満たす r , E^2 , L^2 が粒子の軌道が MSCO のときの値となる。つまり粒子の軌道が MSCO となる r_{MSCO} は必要条件:「MSCO 方程式の解」と十分条件:「 $0 < E^2 < \infty$, $0 < L^2 < \infty$ 」を満たさなくてはならない。

3 具体例

Schwarzschild 時空

Schwarzschild 時空の計量は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (13)$$

である (M は中心物質の質量)。

(10) 式の MSCO 方程式は

$$M \frac{r^2(r-6M)}{(r-2M)^3} = 0$$

となる。この方程式の解である $r = 6M$ は教科書等でよく知られている Schwarzschild 時空の ISCO と一致する。また、このときの角運動量は (12) 式から

$$L = 2\sqrt{3}M$$

となる。

Kottler(Schwarzschild-de Sitter) 時空

計量は

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (14)$$

$$F(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2$$

である (Λ は宇宙定数)。MSCO 方程式は

$$\frac{4}{3}\Lambda r^4 - 5\Lambda M r^3 - Mr + 6M^2 = 0. \quad (15)$$

以下では簡単のため $2M$ で規格化した変数を用いる

$$x := \frac{r}{2M}, \quad \lambda := \frac{4}{3}\Lambda M^2.$$

$$8\lambda x^4 - 15\lambda x^3 - x + 3 = 0. \quad (16)$$

Sturm の定理を用いてこの方程式の実数解の個数を調べる.

この方程式の Sturm 列は

$$f_0(x) = 8\lambda x^4 - 15\lambda x^3 - x + 3 \quad (17)$$

$$f_1(x) = 32\lambda x^3 - 45\lambda x^2 - 1 \quad (18)$$

$$f_2(x) = 225\lambda x^2 + 32x - 123 \quad (19)$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{\lambda}[2(4725\lambda + 128)x - 10125\lambda - 984] \quad (20)$$

$$f_4 = -\frac{\lambda(27\lambda - 4)(16875\lambda - 16)}{(4725\lambda + 128)^2} \quad (21)$$

正の実数解を持つ範囲 $(0, \infty)$ におけるこれら Sturm 列の符号を調べる.

まず $\lambda > 0$ のとき, Sturm 列の符号は

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}[f_0(0)] &> 0 & \operatorname{sgn}[f_0(\infty)] &> 0 \\ \operatorname{sgn}[f_1(0)] &< 0 & \operatorname{sgn}[f_1(\infty)] &> 0 \\ \operatorname{sgn}[f_2(0)] &< 0 & \operatorname{sgn}[f_2(\infty)] &> 0 \\ \operatorname{sgn}[f_3(0)] &> 0 & \operatorname{sgn}[f_3(\infty)] &< 0 \\ \operatorname{sgn}[f_4] &= \operatorname{sgn}[-\lambda(27\lambda - 4)(16875\lambda - 16)] \end{aligned}$$

となる. このときの符号変化数 $\mathcal{V}(x)$ は

(1) $16/16875 < \lambda < 4/27$ のとき, $\mathcal{V}(0) = 2$, $\mathcal{V}(\infty) = 2$ となる. よってこの領域における正の実数解の個数は 0 個.

(2) $\lambda < 16/16875$ または $\lambda < 4/27$ のとき, $\mathcal{V}(0) = 3$, $\mathcal{V}(\infty) = 1$ となる. よってこの領域における正の実数解の個数は 2 個である.

次に $\lambda < 0$ のとき, Sturm 列の符号は

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}[f_0(0)] &> 0 & \operatorname{sgn}[f_0(\infty)] &< 0 \\ \operatorname{sgn}[f_1(0)] &< 0 & \operatorname{sgn}[f_1(\infty)] &< 0 \\ \operatorname{sgn}[f_2(0)] &< 0 & \operatorname{sgn}[f_2(\infty)] &< 0 \\ \operatorname{sgn}[f_3(0)] &= \operatorname{sgn}\left[\frac{10125\lambda + 984}{\lambda}\right] \\ \operatorname{sgn}[f_3(\infty)] &= \operatorname{sgn}\left[-\frac{4725\lambda + 128}{\lambda}\right] \\ \operatorname{sgn}[f_4] &> 0 \end{aligned}$$

となる. 符号変化数 $\mathcal{V}(x)$ は $f_3(x)$ の符号にかかわらず, $\mathcal{V}(0) = 2$, $\mathcal{V}(\infty) = 1$ である. よって $\lambda < 0$ のとき, 正の実数解の個数は 2 個である.

角運動量について計算すると

$$L^2 = -\frac{x^2(2\lambda x^3 - 1)}{2x - 3} \quad (22)$$

となる. r_{MSCO} は $0 < L^2 < \infty$ を満たさなければならぬから

$$\frac{3}{2} < x < \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \quad \text{または} \quad \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} < x < \frac{3}{2}$$

でなければならない. これらから MSCO の個数は $0 < \lambda \leq 16/16875$ のとき, 2 個. ISCO と OSCO が存在する. $\lambda = 16/16875$ のときは重解.

$16/16875 < \lambda$ のとき, 0 個. すべての円軌道は不安定. $\lambda < 0$ のとき, 1 個

となる.

$16/16875$ という値は [Z. Stuchlík & S. Hledík (1999)] の (24) 式 $y_{c(ms)} = 12/15^4$ という値と一致する.

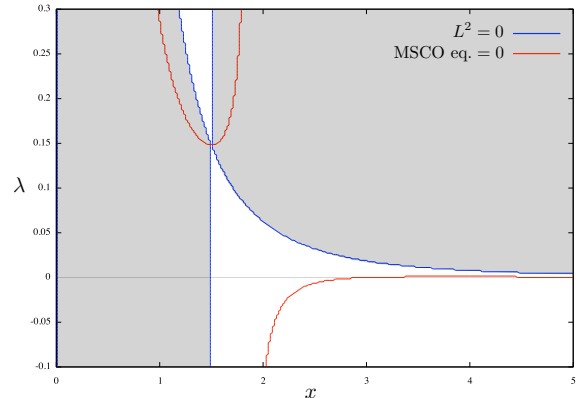


図 1: MSCO 方程式と L^2 . 灰色の領域は $0 < L^2 < \infty$ を満たさない.

OSCO を求めるために, $1 \gg x$ として (16) 式の第 1 項と第 3 項のみを考える

$$8\lambda x^4 - x = 0.$$

よって OSCO は

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (23)$$

となる. 次元を元に戻すと

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{6GM}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}}$$

である. Planck[Planck Collaboration (2015)]の結果から $\Lambda \approx 9514[(\text{km/s/Mpc})^2]$ を代入すると

$$\begin{aligned} r &\approx 1.0 \times 10^{16} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^{\frac{1}{3}} [\text{km}] \\ &\approx 324 \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^{\frac{1}{3}} [\text{pc}] \end{aligned}$$

となる.

4 まとめ

本研究では球対称時空を仮定し, 軌道が MSCO となる条件から MSCO 方程式を得た. r_{MSCO} は MSCO 方程式の解だけでなく, $0 < E^2 < \infty$, $0 < L^2 < \infty$ も満たさなければならないことがわかった.

また, MSCO 方程式には計量の g_{tt} 成分が含まれないことがわかった. 計量の $g_{\theta\theta}$ 成分は多くの場合 $g_{\theta\theta} = r^2$ であるから, MSCO 半径 r_{MSCO} は g_{tt} 成分によってのみ決まると言ってよい. 相対論の検証において r_{MSCO} の測定は重力赤方偏移の測定と同様と考えることができる. また計量の g_{tt} 成分が r について微分可能でなければ, 円軌道を取ることができないということがいえる.

具体例として Schwarzschild 時空と Kottler 時空を扱った. Schwarzschild 時空では MSCO の値が先行研究と一致した. Kottler 時空では MSCO 方程式が r に関する 4 次方程式となったため, Sturm の定理を用いて方程式の解の個数を調べた. その結果, 宇宙定数 Λ の値によって ISCO だけでなく, OSCO が現れることがわかった.

Reference

- T. Ono, T. Suzuki, N. Fushimi, K. Yamada, and H. Asada, arXiv:1410.6265 [gr-qc]
- L. Rezzolla, & A. Zhidenko, Phys. Rev. D 90, 084009
- Z. Stuchlík & S. Hledík, Phys. Rev. D 60, 044006
- Planck Collaboration, arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO]