

重力波データ解析における Matched filter 解析

若松 剛司 (新潟大学大学院 自然科学研究科)

Abstract

重力波はいまだ、直接検出されていない。そして、大型重力波望遠鏡 KAGRA の初期稼動が始まろうとしている。Matched filter 解析の手法は CBC(Compact Binary Coalescence) の重力波波形に対して使われる。波形の template を用意して、パラメータを逐一変えながらサーチを行う。また、もっともらしい signal と通常のノイズとを区別を行なう。つまり、トリガー探査の評価において Chi squared veto が用いられている。CBC の重力波波形は Chirp signal と呼ばれているが、この Chirp signal 探査のアルゴリズムにおいてデータのトリガー探査の評価とデータサイズの変更の二つのステップがある。

Template に使用される波形は、高次の post-Newtonian の波形が使われ周波数の計算は停留位近似により表すことができる。一般に、CB の合体付近では post-Newtonian の波形は数値相対論波形と一致しない場合がある。

これは、Bruce Allen et al, Phys. Rev. D 85, 122006 (2012) のレビューである。

1 Introduction

Matched filter 解析を用いた探査手法は、CBC の重力波波形探査に用いられている。Matched filter 解析を用いた探査手法は FINDCHIRP と呼ばれており、LIGO scientific Collaboration(LSC) で用いられている。検出器のデータが非定常で非 gaussian であるときに、革新的な optimal filter の実行は、既知の signal のパラメータが判明することや、optimal filter の性能が改善する。FINDCHIRP は恒星質量の連星である、Neutron star(NS)、Black hole(BH) の連星探査に使われる。それらの重力波の波源は地上型レーザー干渉計重力波観測装置 (LIGO, Virgo) において主要な観測対象となっている。しかしながら、重力波の検出の課題が二つある。その 1 は signal が正確にわからないということである。パラメータとして与えられるのは、伴星の質量、初期位相、到来時間、距離、検出器と波源の系との方向である。その 2 は、検出器のノイズは完全に定常 gaussian 過程ではないことである。未知パラメータを探査するために、簡単な Matched filter の基本的技術は直交位相波形を用いることである。それにより、未知位相を除去できる。そして、連星の伴星質量のパラメータ空間をカバーするために有効な Fourier transform と波形のテンプレートバンクの使用を適用する。

FINDCHIRP algorithm はテンプレートバンクの中にある、それぞれのテンプレートに対する干渉計の matched filter の応答を計算する。そして、matched filter の大きなスプリアス応答を作ってしまうことをなくすために、 χ^2 判定を計算する。しかし、一方で期待される信号と同じではない。matched filter を基本として、 χ^2 判定による重要なイベントの選択ができる。これらは、CBC 探査の基本的なことであるが、他の重要な段階も含んでいる。データの質の選択とテンプレートバンクの世代、補助のチャンネルを基本とした vetos によるイベントの選択、複数干渉計による重要なトリガーの false alarm rate の計算である。

この論文は FINDCHIRP algorithm の実行手段そのものを記述しているのではない。algorithm を記述するためのものである。

2 Notation

連続系 Fourier 変換の表記は以下である。

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift} dt \quad (1)$$

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f)e^{-2\pi ift} df \quad (2)$$

離散系 Fourier 変換の表記は以下である。

$$\hat{x}[k] = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} x[j] e^{-2\pi i j k / N} \quad (3)$$

$$x[j] = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] e^{2\pi i j k / N} \quad (4)$$

3 WAVEFORM

第一世代重力波干渉計 (Initial LIGO) において、inspiral 波形は $M \sim 12M_{\text{odot}}$ 以下において spin のない場合の post-Newtonian waveform によって正確にモデル化される。質量が大きい場合において、effective one body (EOB) waveform のような和を複数回とるような波形は、非線形な Einstein equation の解を数値計算によって計算している。また他の場合は、重力波の放射により周波数と振幅が単調に増加するような波形の二つの偏波を表している。そのような波形は”chirp”波形と呼ばれており、 $t < t_c$ では、

$$h_+(t) = -\frac{(1+\cos^2\iota)}{2} \left(\frac{GM}{c^2 D}\right) \left(\frac{t_c-t}{5GM/c^3}\right)^{-1/4} \times \cos[2\phi_c + 2\phi(t-t_c; M, \mu)] \quad (5)$$

$$h_\times(t) = -\cos^2\iota \left(\frac{GM}{c^2 D}\right) \left(\frac{t_c-t}{5GM/c^3}\right)^{-1/4} \times \sin[2\phi_c + 2\phi(t-t_c; M, \mu)] \quad (6)$$

ここで、 D は重力波放射源までの距離、 ι は観測者と系の軌道角モーメント間を作る方向の角度、 $M = \mu^{3/5} M^{2/5} = \eta^{3/5} M$ であり、また $M = m_1 + m_2$ となっている。そして、 $\mu = m_1 m_2 / M$ と $\eta = \mu / M$ は”chirp mass”である。 $\phi(t-t_c; M, \mu)$ は連星の軌道の位相である。 t_c, ϕ_c は連星が合体するまでの時間と位相であり、coalescence time、coalescence phase $\phi(0; M, \mu) = 0$ となる。

検出器のアンテナ応答は重力波の二つの偏波に依存しており、重力波の strain を作る。strain は、

$$h(t) = F_+(\alpha, \delta, \psi, t) h_+(t+t_c-t_0) + F_\times(\alpha, \delta, \psi, t) h_\times(t+t_c-t_0) \quad (7)$$

となり、 t_0 は termination time である。 F_+, F_\times は、アンテナ応答関数であり、干渉計に依存する。よっ

て実際には、

$$h(t) = -\frac{(1+\cos^2\iota)}{2} \left(\frac{GM}{c^2 D}\right) \left(\frac{t_c-t}{5GM/c^3}\right)^{-1/4} \times \cos[2\phi_c + 2\phi(t-t_c; M, \mu)] \quad (8)$$

である。ここで termination phase は、

$$2\phi_0 = 2\phi_c - \arctan\left(\frac{F_\times}{F_+} \frac{2\cos\iota}{1+\cos^2\iota}\right) \quad (9)$$

effective distance は、

$$D_{\text{eff}} = D \left[F_+^2 \frac{1+\cos^2\iota}{2} + F_\times^2 \cos^2\iota \right]^{-1/2} \quad (10)$$

となる。さらに、停留位相近似により周波数空間における波形を表すことができる。

$$\begin{aligned} \tilde{h}(f) &= -\left(\frac{5\pi}{24}\right)^{-1/2} \left(\frac{GM}{c^3}\right) \left(\frac{GM}{c^2 D_{\text{eff}}}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{GM}{c^3} \pi f\right)^{-7/6} e^{i\Phi(f; M, \mu)} \\ &= \left(\frac{1\text{Mpc}}{D_{\text{eff}}}\right) \mathcal{A}_{1\text{Mpc}}(M, \mu) \\ &\quad \times f^{-7/6} e^{-i\phi}(f; M, \mu) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\tilde{h}(f) = -\left(\frac{5\pi}{24}\right) \left(\frac{GM_\odot/c^2}{1\text{Mpc}}\right) \left(\frac{\pi GM_\odot}{c^3}\right) \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{5/6} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Phi(f; M, \mu) &= 2\pi f t_0 - \pi/4 + \frac{3}{128\eta} [v^{-5} + \\ &\quad \left(\frac{3715}{756} + \frac{55}{9}\eta\right)v^{-3} - 16\pi v^{-2} + \\ &\quad \left(\frac{15293365}{508032} + \frac{27145}{504}\eta\right. \\ &\quad \left.+ \frac{3085}{72}\eta^2\right)v^{-1}] \end{aligned} \quad (13)$$

$$v = \left(\frac{GM}{c^3} \pi f\right)^{1/3} \quad (14)$$

FINDCHIRP algorithm において、effective distance は 1Mpc で設定されている。 $\mathcal{A}_{1\text{Mpc}}(M, \mu)$ は、次元が $[time]^{-1/6}$ である。 M, μ のパラメータに依存している。 $f^{-7/6}$ は系のパラメータには依存していない。

理論的に、ある高周波の連星というのは inspiral の終りの段階である。そして軌道は、力学的なタイムスケールで崩壊する。正確な周波数は extreme mass ratio limit $\eta \rightarrow 0$ ではわかることが困難である。この限界では、Schwarzschild BH の軌道にて、例えば、回りを周回しているテスト粒子のように、Innermost stable circular orbit (ISCO) として知られている。これは、

$$f_{\text{ISCO}} = \frac{c^3}{6\sqrt{6}\pi GM} \quad (15)$$

で表されている。

4 MATCHED FILTER

matched filter は定常で gauss noise の場合において既知の波形を検出する optimal filter である。データを $s(t)$ とする。signal が無いときは、 $s(t) = n(t)$ である。signal があるときは、 $s(t) = n(t) + h(t)$ である。filter template の $h_{template}(t)$ は、

$$\begin{aligned} x(t_0) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{s}(f) \tilde{h}_{template}^*(f)}{S_n(f)} df \\ &= 4Re \int_0^{\infty} \frac{\tilde{s}(f) [\tilde{h}_{template}^*(f)]_{t_0=0}}{S_n(f)} e^{2\pi i f t_0} df \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、signal $h_{template}(t)$ は termination time t_0 に依存した量である。waveform templates は、有効距離 $D_{eff} = 1Mpc$ の系から作られる。signal to noise ratio を構成するための、それぞれの template を計算するための規格化定数は、

$$\sigma^2 = 4 \int_0^{\infty} \frac{|\tilde{h}_{1Mpc,m}(f)|^2}{S_n(f)} df \quad (17)$$

である。また、

$$\rho(t) = \frac{|z(t)|}{\sigma} \quad (18)$$

は、amplitude SNR である。ここで $z(t)$ は、 t_0 における $x(t)$ の Re, Im 部分による modulus of the complex filter output である。

5 FINDCHIRP flow chart

図 1 に FINDCHIRP algorithm の flow chart を示す。二つの loop が主要な計算である。薄い grey 色の外部 loop が template について、濃い grey が data segment についての計算域である。check の計算域は、chi-squared を計算する部分である。template の部分は離散系表現で書くことができ、(11)~(14) から計算される。data segment の ζ を計算する部分は、Matched filter 式 (16) により導かれている。

$$\zeta_{m,n}[j] = \sum_{k=0}^{N-1} F_n[k] G_m[k] e^{2\pi i j k / N} \quad (19)$$

chi-squared の計算は、まず、式 (19) について、 $\zeta_{l,m,n}[j]$ を考える。

$$\zeta_{m,n}[j] = \sum_{l=1}^p \zeta_{l,m,n}[j] \quad (20)$$

ここで、 p は χ^2 確率分布の自由度 ν に関連しており、 $\nu = 2p - 2$ となる。 χ^2 は、

$$\chi_{m,n}^2[j] = \sum_{l=1}^p \frac{|\zeta_{l,m,n}[j] - \zeta_{l,m,n}[j]/p|^2}{\varsigma^2[k_{high,m}]/p} \quad (21)$$

である。純粋な gaussian noise というのは χ^2 分布に依存して、 ν の自由度を持つ。もしデータの中に signal が存在するならば、templateni には小さな差をそれぞれ template bank 中にもっており、grid 空間上にある。true signal の近くにあることが期待される。そして、小さい非中心のパラメータを得る。 χ^2 による値の影響は、 $\lambda_{max} = 2\delta\sigma^2/D_{eff}^2$ よりも大きくはならない。 δ は signal と template の間の誤差である。この algorithm のしきい値は、

$$\Xi_{m,n}[j] = \frac{\chi_{m,n}^2[j]}{p + \delta\rho_{m,n}^2[j]} \quad (22)$$

である。

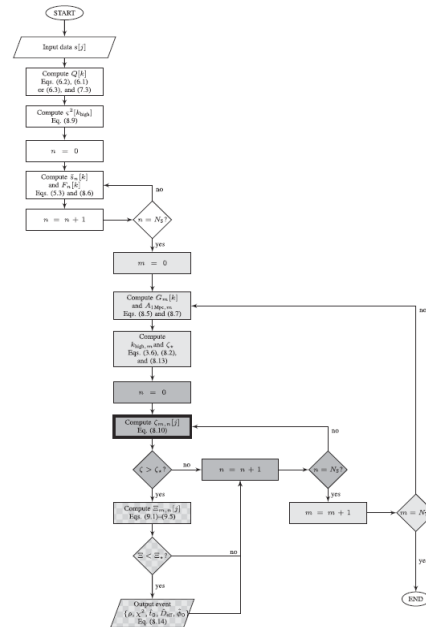


図 1: FINDCHIRP flow chart

6 CONCLUSION

FINDCHIRP algorithm を基本とした inspiral 探査の詳細は、segment の長さは 256 秒であり、3GHz Pentium 4CPU で実行をされた。実際に FINDCHIRP algorithm は連星からの重力波探査のみからなる。特徴的な inspiral analysis pipeline では、data selection, template bank generation, trigger generation using FINDCHIRP, trigger coincidence tests between multiple detectors, vetoes based on instrumental behavior, coherent combination of the optimal filter output from multiple detectors, and finally manual candidate follow ups が含まれている。

FINDCHIRP algorithm を修正することは単純である。それは、template の位相の構造の項を加えることで、second post-Newton よりも高い次元の template を使用することである。位相の方程式は FINDCHIRP の LSC の実行で使われた。不完全ではあるが、Appendix A で与えられている。

それぞれの修正は、停留位相近似を使った分解を活かすことはできないが、しかし、それらは周波数空間の post-Newtonian template に対して、探査 code の発展と試行が有効的に再活用される。

Acknowledgement

基礎物理学研究所 (研究会番号: YITP-W-15-04) 及び国立天文台からのご支援に感謝いたします。

Reference

Jolien D. E. Creighton & Warren G. Anderson “Gravitational wave physics and Astronomy”, WILEY-VCH

Bruce Allen et al, Phys. Rev. D 85, 122006 (2012)