

平面電磁波における真空偏極

矢田部 彰宏 (早稲田大学大学院 先進理工学研究科)

Abstract

古典的には電磁波同士は相互作用をすることはないが、量子論においては光子同士の相互作用が起こる。光子同士の相互作用によって起こる現象の一つに真空偏極がある。本研究では、平面電磁波中の真空偏極に注目し、平面電磁波の変化を考慮して定量的に評価することを目指している。ここでは、平面電磁波の変化を取り入れることのできる手法を開発した。また、平面電磁波の長波長極限である crossed field に対する真空偏極を考え、屈折率を求めた。

1 イントロダクション

古典的な電磁気学では電磁波同士は相互作用をすることはないが、量子論においては光子同士の相互作用が起こると考えられている。特に、強い電磁場の外場のもとで伝播する電磁波 (光子) は外場の光子と相互作用することによって複屈折現象を起こす。この現象を真空偏極という。真空偏極は量子電気力学 (QED) によって記述される現象で長い間理論的に研究されてきた。

QED 的な効果は critical field と呼ばれる量 (磁場の場合は $4.4 \times 10^{13} \text{G}$) と同程度、またはそれよりも強い電磁場のもとで重要になる。これほどの強い電磁場は、磁場だけに関しては中性子星の中でも特に強い磁場をもつマグネターと呼ばれる天体に存在する。地上の実験施設においては critical field に達していないが、最近のレーザー実験の技術の進歩は著しく、近い将来、真空の量子論的な性質を確かめられるようになると考えられている。

強い電磁場のもとでの真空の性質を理解するために便利なものとして Heisenberg-Euler ラグランジアンがある (Heisenberg & Euler 1936)。Heisenberg-Euler ラグランジアンは一様一定、またはゆっくりと変化する電磁場に対して求めたものである。しかし、レーザーの電磁場は本質的に平面電磁波であるから、電磁場の変化による量子補正を含まなくてはならない。また、強い電磁場の変化がマグネターの放射において重要であるとも考えられている (Heyl & Hernquist 1998)。このように電磁場の変化による量子論的な補正を考慮にいれなくてはならない。

ここでは我々は平面電磁波における真空偏極に注目し、強い電磁場の量子論的な性質を扱うときによく使われる proper time method に対する摂動論を開発した。結果として、平面電磁波の長波長極限に対応する crossed field と呼ばれる系の屈折率を求めた。

2 理論

今回、真空偏極を扱うために、場の量子論における有効作用を用いる。有効作用 $\Gamma^{(1)}$ はプロパゲータ G で

$$\Gamma^{(1)} = -i \ln \text{Det} G^{-1}(x, x) \quad (1)$$

と表されることが知られている。ここで、プロパゲータは粒子の伝播を表す関数で、今回 G は電子のプロパゲータである。

今回扱う系は外場として A が、伝播する電磁波として b が、存在するとする。電磁波 b の振る舞いを求めたいので、ここでは b に関する方程式

$$\square b_\mu - \partial_\mu \partial^\nu b_\nu = - \langle j_\mu \rangle \quad (2)$$

を扱う。右辺のカレントの期待値は

$$\langle j^\mu(x) \rangle = i \text{etr}(\gamma^\mu G(x, x)) \quad (3)$$

と表され、演算子で書き表すと (Adler 1971) より

$$\begin{aligned} & \langle j^\mu(x) \rangle \\ &= \frac{e}{2} \int_0^\infty ds e^{-im^2 s} \\ & \times \text{tr} \left[\langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(s) + \hat{\Pi}^\mu(0) | x(0) \rangle \right. \\ & \left. - i\sigma^{\mu\nu} \langle x(s) | \hat{\Pi}_\nu(s) - \hat{\Pi}_\nu(0) | x(0) \rangle \right] \quad (4) \end{aligned}$$

と表せる。ここで、ブラ $\langle x(s) |$ とケット $|x(0)\rangle$ ではさまれた部分の演算子を求めるが、有用な方法として、proper time method (Schwinger 1951) を用いる。proper time method は場の量子論の問題を量子力学に焼き直して解く方法である。

proper time method においてプロパゲータは

$$\begin{aligned} & G(x, y) \\ &= i \int_0^\infty ds e^{-im^2 s} \\ & \times \left[\langle x | -\gamma \hat{\Pi} e^{-i(-\gamma \hat{\Pi})^2 s} | y \rangle \right. \\ & \left. - \langle x | m e^{-i(-\gamma \hat{\Pi})^2 s} | y \rangle \right] \quad (5) \end{aligned}$$

のように積分によって表される。ただし、 $\hat{\Pi}_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$ で、 A_μ は系全体の電磁場のベクトルポテンシャルである。ここで、演算子 $e^{-i(-\gamma \hat{\Pi})^2 s}$ を量子力学における時間発展演算子とみなすと、この問題はハミルトニアン $H = -(\gamma \hat{\Pi})^2$ で時間発展をする系とみなせる。

proper time method において、proper time に関する発展はハミルトニアン

$$H = -\hat{\Pi}^2 + \frac{1}{2} e\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (6)$$

によって記述される。

我々は強い外場中に弱い電磁波が伝播することを考えているので、伝播する電磁波を摂動として考える。そこで、量子力学における相互作用描像を用いて、proper time method における摂動論を開発した。この方法を用いれば、外場が平面電磁波であっても、電磁場の変化を考量することができる。

今回は crossed field の場合における真空偏極を考える。考えている系は図 1 である。

crossed field の場合、ハミルトニアンは

$$H^{(0)} = -(i\partial_\mu - eA_\mu(\hat{x}))^2 + \frac{1}{2} e\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (7)$$

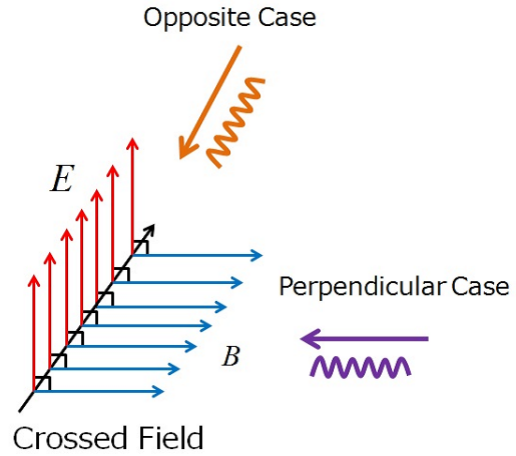


図 1: 弱い電磁波 (オレンジと紫色の波線) が外場の crossed field (赤色の矢印が電場、青色の矢印が磁場を表す) を伝播する。

と表される。そこを電磁波が伝播する場合のハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= -(i\partial_\mu - eA_\mu(\hat{x}) - eb_\mu(\hat{x}))^2 + \frac{1}{2} e\sigma^{\mu\nu} (F_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}(\hat{x})) \\ &= H^{(0)} + \delta H \quad (8) \end{aligned}$$

である。ここで、 $H^{(0)}$ は自由場のハミルトニアンで、 δH は摂動の相互作用ハミルトニアンとみなす。このハミルトニアンを $\hat{\Pi}_\mu^{(0)} = i\partial_\mu - eA_\mu$ と $\delta\hat{\Pi}_\mu = -eb_\mu$ で表すと、

$$\begin{aligned} H &= H^{(0)} - \hat{\Pi}_\mu^{(0)} \delta\hat{\Pi}^\mu - \delta\hat{\Pi}^\mu \hat{\Pi}_\mu^{(0)} \\ & \quad + \delta\hat{\Pi}_\mu \delta\hat{\Pi}^\mu + \frac{1}{2} e\sigma^{\mu\nu} g_{\mu\nu}(\hat{x}) \quad (9) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $g_{\mu\nu}(\hat{x}) = \partial_\mu b_\nu(\hat{x}) - \partial_\nu b_\mu(\hat{x})$ は伝播する電磁波の場のテンソルであり、 $\sigma^{\mu\nu} = i/2 [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ はガンマ行列の交換子である。ここで摂動の最低次のみを考えると δH は

$$\delta H = -\hat{\Pi}_\mu^{(0)} \delta\hat{\Pi}^\mu - \delta\hat{\Pi}^\mu \hat{\Pi}_\mu^{(0)} + \frac{1}{2} e\sigma^{\mu\nu} g_{\mu\nu}(t) \quad (10)$$

と表される。

次に、量子力学の相互作用描像に基づいて演算子の proper time に関する発展がどのように記述されるかをみよう。ここでは、 $H^{(0)}$ が自由場のハミルトニアンで δH が相互作用ハミルトニアンとしている。

これらを相互作用描像の演算子 $\hat{A}_I(t)$ と Heisenberg 描像の演算子 $\hat{A}_H(t)$ の時間発展を比較すると

$$\hat{A}_H(t) = U^\dagger(t)\hat{A}_I(t)U(t) \quad (11)$$

となる。ただし、 $U(t) = e^{iH^{(0)}t}e^{-iHt}$ である。 $U(t)$ は一般的に δH_I の最低次では

$$U(t) \simeq 1 + (-i) \int_0^t dt_1 \delta H_I(t_1) \quad (12)$$

と表される。ただし、 $\delta H_I(t_1) = e^{iH^{(0)}t_1}\delta H_I e^{-iH^{(0)}t_1}$ である。また、 H_I の最低次までの確率振幅は

$$\begin{aligned} & \langle x(s)|x(0) \rangle \\ &= \langle x^{(0)}(s)|U(t)|x \rangle \\ &\simeq \langle x^{(0)}(s) \left[1 - i \int_0^s dt \delta H_I(t) \right] |x(0) \rangle \quad (13) \end{aligned}$$

である。これらにより、必要な演算子の期待値を自由場のハミルトニアンで解いたもので表すことができ、

$$\begin{aligned} & \langle x(s)|\hat{\Pi}^\mu(s)|x(0) \rangle \\ &= \langle x^{(0)}(s)|\hat{\Pi}_I^\mu(s)U(s)|x(0) \rangle \quad (14) \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} & \langle x(s)|\hat{\Pi}^\mu(0)|x(0) \rangle \\ &= \langle x^{(0)}(s)|U(s)\hat{\Pi}_I^\mu(0)|x(0) \rangle \quad (15) \end{aligned}$$

によって、カレントを計算する。

3 結果と考察

今回計算を行う crossed field は垂直で大きさが等しい電場と磁場を含む系で、平面電磁波の長波長極限に対応している。高強度レーザーは多くの場合可視光を放出するため、伝播する電磁波が x 線のような波長が短いものであれば、レーザーの電磁場の非一様性の影響が無視できる。そのため、crossed field の場合を計算をすればよい近似になっている。今回は外場の crossed field として電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{B} がそれぞれ $\mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{B} \parallel \mathbf{e}_z$ となっているもの考える。電磁波のモードとしては x 方向に進行するものは偏光が (1)z 軸方向、(2)y 軸方向に平行なものと考え、

y 方向に進行するものは偏光が (3)z 軸方向、(4)x 軸方向に平行なもの考えた。

まずはじめ、電磁場が弱い場合の結果を図 2 にのせる。現在の到達しているレーザー強度や次世代レーザーによって達成される強度で、エネルギーが電子質量の 1/50 のエネルギーの光子 ($\simeq 10\text{keV}$) に対する屈折率がどれほど 1 からずれるかということを図にプロットした。また、偏光によって屈折率のずれが異なることから複屈折が起きていることがわかる。この結果は外場が弱い極限を求めた (Narozhnyi 1969) とよく合い、2 次関数で近似できる。

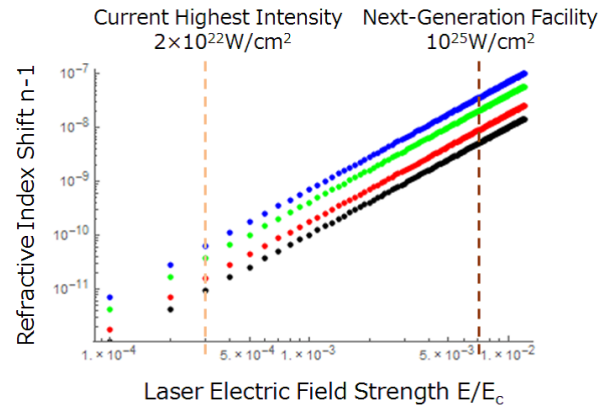


図 2: 外場の強さを次世代レーザー程度にしたときのエネルギーが電子質量の 1/50 のエネルギーの光子に対する屈折率の実部のずれ。プロットの色はモードを表す (青 (1) 緑 (2) 黒 (3) 赤 (4))。場の強さは critical field $E_c = m_e^2/e(c = \hbar = 1)$ で規格化した。凡例は以下同様。

また、外場が強い場合のエネルギーが電子質量の 1/50 のエネルギーの光子に対する屈折率の 1 からのずれを図 3 にのせた。この場合のずれは 2 次関数で近似することはできない。屈折率の虚部 (図 4) は電子陽電子の対生成を表している。

最後に、外場の強さを $E/E_c = 0.1$ とした場合で、進行する光子のエネルギーを変化させたものを計算した (図 5,6)。弱い場の極限においては、屈折率は進行する光子のエネルギーには依らないが、光子のエネルギーを大きくしていくと屈折率も変化する。

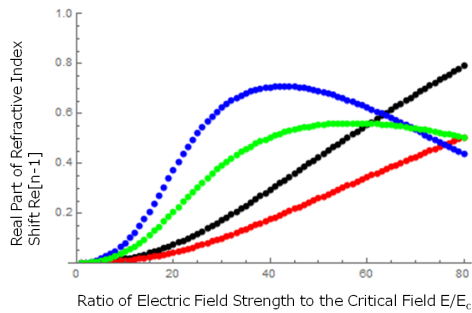


図 3: 外場が強い場合の屈折率の実部のずれ。場の強さ E は critical field $E_c = m_e^2/e(c = \hbar = 1)$ で規格化した。

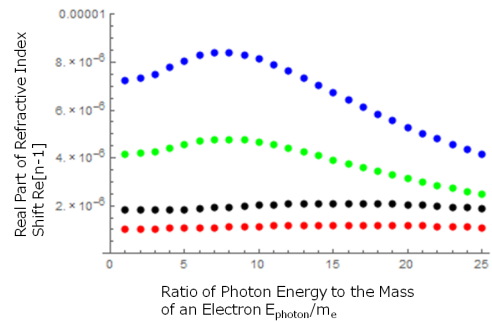


図 5: 進行する光子のエネルギーを変化させたときの屈折率の実部のずれ。光子のエネルギー E_{photon} は電子質量で規格化した。

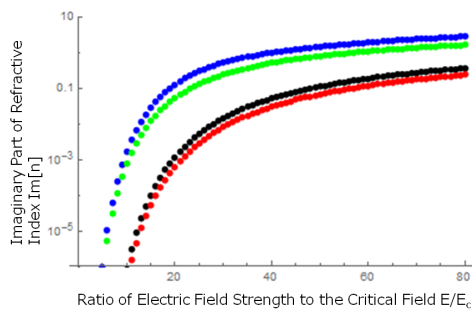


図 4: 外場が強い場合の屈折率の虚部。場の強さ E は critical field $E_c = m_e^2/e(c = \hbar = 1)$ で規格化した。

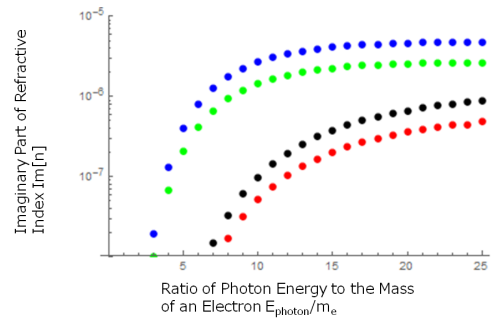


図 6: 進行する光子のエネルギーを変化させたときの屈折率の虚部。光子のエネルギー E_{photon} は電子質量で規格化した。

Acknowledgement

京都大学基礎物理学研究所 (研究会番号:YITP-W-15-04)、国立天文台及び理論天文学宇宙物理学懇談会からのご支援に感謝いたします。

S. L. Adler, Ann. Phys. **67**, 599.

J. Schwinger 1951, Phys. Rev. **82**, 664.

N. B. Narozhnyi 1969, Sov. Phys. -JETP **28**, 371.

Reference

W. Heisenberg & H. Euler 1936, Z. Phys. **98**, 714.
Translated edition is arXiv:physics/0605038.

J. S. Heyl & L. Hernquist 1998, Phys. Rev. D. **58**, 043005.